PSI* 2025/26 DS 3A

Intégration et dérivation fractionnaires

Préambule

On s'intéresse dans ce problème à certains sous-ensembles de l'espace des fonctions à valeurs réelles et continues sur $]0,+\infty[$. On peut classiquement définir les opérations d'intégration J et de dérivation D de sorte qu'en particulier la composition $D \circ J$ soit l'opérateur identité, où la notation $\circ$ désigne l'opérateur de composition usuel.

On cherche alors à définir pour tout réel $\alpha > 0$ des opérateurs fractionnaires d'intégration J^α et de dérivation D^α tels que $D^\alpha \circ J^\alpha$ soit l'identité et tels que pour tout $\alpha, \beta > 0$ on ait :

$$J^\alpha \circ J^\beta = J^{\alpha+\beta} \text{ et } D^\alpha \circ D^\beta = D^{\alpha+\beta}.$$

En particulier pour $\alpha = 1/2$, on cherche à définir une racine carrée de D, i.e. un opérateur $D^{1/2}$ tel que $D^{1/2} \circ D^{1/2} = D$.

Parmi les nombreuses approches possibles, nous allons suivre celles de Riemann-Liouville et Caputo.

- On commence par des préliminaires sur la fonction Gamma ;
- on démontre ensuite une version simple du théorème de Fubini pour des fonctions continues sur un carré et qu'on s'autorisera à utiliser dans la suite du problème dans un cadre plus général, cf. la question 2) ;
- on introduit enfin la transformation de Laplace et on prouve son caractère injectif sur les fonctions continues.

L'intégration fractionnaire est définie dans la partie A alors que les dérivées fractionnaires le seront dans la partie B. Dans la dernière partie on s'intéressera enfin à deux équations différentielles fractionnaires simples.

Le candidat est libre d'admettre les résultats de la partie Préliminaires*, pour aborder les parties A, B et C. Pour simplifier les arguments dans les préliminaires on se restreint aux fonctions continues sur* $[0,+\infty[$*, alors qu'on aura parfois besoin de considérer des fonctions continues sur* $]0,+\infty[$ *intégrables au voisinage de* 0*. Le candidat est autorisé à utiliser les résultats des préliminaires dans ce cadre plus général.*

Préliminaires

Pour information, la correction de ces "préliminaires" occupe 40% de mon corrigé...

1. On considère la fonction Gamma définie par : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que Γ est bien définie pour x réel strictement positif.
   (b) Montrer que pour tout $x > 0$, on a la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\Gamma(n) = (n-1)!$.

- **On admettra pour la suite** que la fonction Gamma précédente peut être prolongée en une fonction qu'on notera encore Γ, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ et vérifiant l'équation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$: l'écriture $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ n'est alors valable que pour $x > 0$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose en outre $\Gamma(-n) := +\infty$.
- **On utilisera aussi** sans justification l'égalité suivante :

$$B(p,q) := \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (E_1)$$

où p, q sont des réels strictement positifs.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ strictement positif et soit $f : [0, a] \times [0, a] \to \mathbb{R}$ définie et continue. Dans cette question on cherche à établir la version simple suivante du théorème de Fubini :
$$\int_0^a \mathrm{d}t \left(\int_0^t f(t,u)\,\mathrm{d}u \right) = \int_0^a \mathrm{d}u \left(\int_u^a f(t,u)\,\mathrm{d}t \right), \qquad (E_2)$$
que le candidat pourra aussi utiliser dans la suite du problème pour $a = +\infty$ **lorsque** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \left(\int_0^t |f(t,u)|\,\mathrm{d}u \right)$ **converge.**
   (a) i. Pour $t \in [0, a]$ fixé, on introduit la fonction définie par $h(\eta) = \displaystyle\int_0^t f(t+\eta, u)\,\mathrm{d}u$ pour $\eta \in [-t, a-t]$. Montrer qu'elle est continue (et donc notamment en 0).
   ii. Montrer avec soin la continuité de $t \mapsto \displaystyle\int_0^t f(t,u)\,\mathrm{d}u$ sur $[0, a]$.
   iii. Calculer la dérivée de la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{d}t \left(\int_0^t f(t,u)\,\mathrm{d}u \right)$.
   (b) Pour tous $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant a$, on introduit $h(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^\alpha \mathrm{d}u \left(\int_u^\beta f(t,u)\,\mathrm{d}t \right)$.
   i. Expliciter la dérivée partielle $\dfrac{\partial h}{\partial \alpha}$.
   ii. Expliciter $\dfrac{\partial h}{\partial \beta}$.
   iii. Soit $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{d}u \left(\int_u^x f(t,u)\,\mathrm{d}t \right) = h(x,x)$.
   En admettant que G est $\mathcal{C}^1$ avec $G'(x) = \dfrac{\partial h}{\partial \alpha}(x,x) + \dfrac{\partial h}{\partial \beta}(x,x)$, finir d'exprimer $G'(x)$.
   (c) Déduire de ce qui précède une preuve de l'égalité (E_2).
3. Pour $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ des fonctions continues, on définit leur produit de convolution :
$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$
   (a) Montrer que $f * g$ est continue sur $[0, +\infty[$.
   (b) Montrer que le produit de convolution est commutatif.
   (c) Montrer que le produit de convolution est associatif.
4. Une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue est dite d'ordre exponentiel s'il existe des réels $M > 0$ et r tels que pour tout $t \geqslant 0$, on ait : $|f(t)| \leqslant M e^{rt}$. Pour une telle fonction f, on définit alors sa transformée de Laplace :
$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{L}(f)(s)$ est bien définie pour tout réel s assez grand.
   (b) Montrer que si f est de classe C^1 avec f et f' d'ordre exponentiel, alors pour s assez grand, $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$.
   (c) Soient f et g des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ et d'ordre exponentiel. Montrer que $f * g$ est d'ordre exponentiel.
   (d) Sous les hypothèses de la question précédente, en utilisant (E_2) pour $a = +\infty$, montrer que, pour s assez grand,
$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\mathcal{L}(g)(s).$$
5. On cherche à présent à montrer que $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s)$ pour tout s assez grand si et seulement si $f = g$.
   (a) Justifier qu'on peut se ramener à chercher les fonctions f telles que $\mathcal{L}(f)(s) = 0$ pour tout s assez grand.
   (b) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $n \geqslant 0$, on ait : $\displaystyle\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$, et en déduire que f est la fonction nulle.
   Indication : on pourra utiliser, sans justification, le théorème d'approximation de Weierstrass qui établit l'existence pour tout $\epsilon > 0$, d'un polynôme $p_\epsilon \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\displaystyle\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_\epsilon(x)| \leqslant \epsilon$.
   (c) En déduire que $\mathcal{L}$ est injective.
   Indication : on pourra utiliser un changement de variable $y = e^{-t}$.

Dans la suite du problème le candidat pourra librement utiliser les résultats de ces préliminaires dans le cas où les fonctions ne sont plus nécessairement continues en 0 mais y sont seulement intégrables.

A – Intégration fractionnaire

6. Pour $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et intégrable au voisinage de 0, on note $I(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et pour tout $n \geqslant 2$ on définit par récurrence : $I^n(f)(x) := I^{n-1}(I(f))(x)$.
   Montrer que $I^2 f(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$, puis que :
   $$I^n(f)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
7. Pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\Phi_\alpha :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :
   $$\Phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$
   en convenant que pour $\alpha \in \mathbb{Z}$ négatif ou nul, Φ_α est la fonction nulle.
   (a) Quelle est la dérivée m^{e} de Φ_α ?
   (b) Montrer, en utilisant (E_1), que pour tous α, β des réels strictement positifs, on a : $\Phi_\alpha * \Phi_\beta = \Phi_{\alpha+\beta}$.
   (c) Expliciter $\mathcal{L}(\Phi_\alpha)(s)$ pour $\alpha > 0$.
8. Pour tout réel $\alpha > 0$, on définit :
   $$J^\alpha(f)(x) = \Phi_\alpha * f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-u)^{\alpha-1} f(u)\,\mathrm{d}u,$$
   et on note J^0 l'opérateur identité, i.e. $J^0(f)(x) = f(x)$. D'après la question 6), pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $J^n = I^n$.
   (a) Montrer que pour tous réels α, β positifs, on a : $J^\alpha \circ J^\beta = J^{\alpha+\beta}$.
   (b) Soit $\alpha > 0$. Montrer que $J^\alpha f$ est la fonction nulle si et seulement si f est la fonction nulle.
   (c) On suppose f d'ordre exponentiel. Pour $\alpha > 0$, montrer que $\mathcal{L}(J^\alpha f)(s)$ est bien défini pour s assez grand, et égal alors à $s^{-\alpha}\mathcal{L}(f)(s)$.
   (d) Pour α et γ des réels strictement positifs, montrer que $J^\alpha \Phi_\gamma = \Phi_{\gamma+\alpha}$.

B – Dérivées fractionnaires

On note D l'opération de dérivation usuel, $D(f)(x) = f'(x)$ lorsque f est dérivable. Par récurrence, lorsque cela est possible, on définit $D^n(f) = D(D^{n-1}f)$ de sorte que trivialement $D^n \circ J^n$ soit l'opérateur identité.

9. Pour f de classe $\mathcal{C}^n$, montrer que $J^n \circ D^n(f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\dfrac{x^k}{k!}$.
10. Étant donné un réel $\alpha > 0$, on note m l'entier tel que $m-1 < \alpha \leqslant m$, et on déduit $D^\alpha := D^m \circ J^{m-\alpha}$, i.e., sous réserve d'existence,
    $$D^\alpha f(t) = \begin{cases} D^m\left(\dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\displaystyle\int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^{\alpha+1-m}}\,\mathrm{d}u\right) & \text{si} \quad m-1<\alpha<m, \\ D^m f(t) & \text{si} \quad \alpha = m, \end{cases}$$
    et on note D^0 l'opérateur identité.
    Remarque : on ne demande pas au candidat de donner des conditions nécessaires pour l'existence de $D^\alpha f$.
    (a) Pour tout $\alpha > 0$, expliciter $D^\alpha \circ J^\alpha$.
    (b) Pour $f = \mathbf{1}$, expliciter $D^\alpha \mathbf{1}$ et préciser pour quel α, la fonction $D^\alpha \mathbf{1}$ est la fonction nulle.
    (c) Pour $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$, montrer que $D^\alpha \Phi_\gamma = \Phi_{\gamma-\alpha}$.
    (d) Pour f d'ordre exponentiel, montrer que $D^\alpha f$ est la fonction nulle si et seulement si f s'écrit sous la forme $f(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j x^{\alpha-j}$, où $m-1 < \alpha \leqslant m$.
11. Loi des exposants.
    (a) Soient $f = \Phi_{1/2}$ et $\alpha = \beta = 1/2$. Calculer $(D^\alpha \circ D^\beta)f$ et $D^{\alpha+\beta} f$.

(b) Soient $g = \Phi_{3/2}$, $\alpha = 1/2$ et $\beta = 3/2$. Calculer $(D^\alpha \circ D^\beta)g$, $(D^\beta \circ D^\alpha)g$ et $D^{\alpha+\beta}g$.

(c) Soit $f(t) = t^\lambda \eta(t)$ où $\lambda > -1$ et $\eta(t) = \sum_{n\geqslant 0} \alpha_n \frac{t^n}{n!}$ admet un rayon de convergence $R > 0$. Montrer alors que pour tous $0 \leqslant t < R$, $0 \leqslant \beta < \lambda + 1$ et $\alpha \geqslant 0$, on a : $(D^\alpha \circ D^\beta)f = D^{\alpha+\beta}f$.

12. Soit un réel $\alpha > 0$ et $m - 1 < \alpha \leqslant m$. On pose alors, sous réserve d'existence, $D_*^\alpha f := J^{m-\alpha} \circ D^m f$, i.e.

$$D_*^\alpha f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \displaystyle\int_0^t \frac{f^{(m)}(u)}{(t-u)^{\alpha+1-m}} \,\mathrm{d}u & \text{si} \quad m-1<\alpha<m, \\ D^m f(t) & \text{si} \quad \alpha = m. \end{cases}$$

(a) Soit une fonction f de classe C^m, telle que $D_*^\alpha f$ soit bien définie et égale à la fonction nulle. Montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à $m-1$.

(b) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, et soit $0 < \alpha < 1$. Montrer que $(D \circ J^\alpha)f(x) = (J^\alpha \circ D)f(x) + f(0)\Phi_\alpha(x)$.

(c) Soit $m - 1 < \alpha < m$ et soit f de classe C^m sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles. Sous réserve d'existence de tous les termes, montrer que :

$$D^\alpha f(x) = D_*^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0).$$

(d) En déduire que $D^\alpha \left(f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) = D_*^\alpha f(x)$.

C – Deux équations différentielles fractionnaires

13. Pour $0 < \alpha < 1$, l'équation d'Abel en g est :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{g(u)}{(t-u)^{1-\alpha}} \,\mathrm{d}u = f(t),$$

où f est une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ et d'ordre exponentiel.

(a) Exprimer g en fonction de f à l'aide de l'opérateur D^α.

(b) On suppose que g est d'ordre exponentiel. Exprimer la transformée de Laplace de g en fonction de celle de f.

14. Pour $\alpha \geqslant 0$ on introduit la série entière : $E_\alpha(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{\Gamma(1+\alpha k)}$.

(a) Calculer $E_0(\theta)$, $E_1(\theta)$ et $E_2(-\theta^2)$.

(b) Montrer que le rayon de convergence de $E_\alpha(\theta)$ est strictement positif.

(c) On pose $e_\alpha(t) = E_\alpha(-(t^\alpha))$ et on admet qu'il est d'ordre exponentiel. Montrer que pour $s > 1$, on a $\mathcal{L}(e_\alpha)(s) = \dfrac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1}$.

(d) On pose $u_k := J^k e_\alpha$. Montrer que $\mathcal{L}(u_k)(s) = \dfrac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha + 1}$.

15. On cherche à résoudre l'équation $D_*^\alpha u = -u$. Montrer qu'après application de l'opérateur J^α, cette équation devient :

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{t^k}{k!} - J^\alpha u(t),$$

où on précisera les c_k.

16. On suppose que u est d'ordre exponentiel. Montrer que :

$$\mathcal{L}(u)(s) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{s^{k+1}} - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}(u)(s),$$

et en déduire que $u = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} c_k u_k$.