PSI* 2025/26 DL 8

Noyau de Jackson

Travail min. demandé : jusqu'à Q16 ce serait bien. Et plus pour qui veut ! Pour mercredi 21 janvier.

Notations

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leqslant b$ on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $a \leqslant k \leqslant b$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme

$$x \longmapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

où, pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$, $c_k \in \mathbb{C}$. On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n. C'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, ce qu'on ne demande pas de vérifier.

On note $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C}^1_{2\pi}$ le sous-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ 2π-périodiques. Pour $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $h > 0$, on pose :

$$\omega_g(h) = \sup_{|t-s| \leqslant h} |g(s) - g(t)|.$$

Pour toute fonction bornée f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on pose : $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$.

Partie A – Préliminaires

Q 1. Montrer que si g est la fonction sinus, alors, pour tout $h > 0$, $\omega_g(h) \leqslant h$.

Q 2. (a) Montrer que, pour tous $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $h > 0$, $\omega_g(h)$ est un réel bien défini.

(b) On suppose que $g \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$. Montrer que, pour tout $h > 0$, $\omega_g(h) \leqslant h \|g'\|_\infty$. En déduire que $\lim_{h \to 0} \omega_g(h) = 0$.

On admet que $\lim_{h \to 0} \omega_g(h) = 0$ *est vrai pour tout* $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.

Q 3. Soit h et h' deux réels strictement positifs et soit $g \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$.

(a) Montrer que, si $h \leqslant h'$, alors $\omega_g(h) \leqslant \omega_g(h')$.

(b) Montrer que $\omega_g(h + h') \leqslant \omega_g(h) + \omega_g(h')$.

(c) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 et pour tout réel λ strictement positif :

$$\omega_g(nh) \leqslant n\, \omega_g(h) \quad \text{et} \quad \omega_g(\lambda h) \leqslant (1 + \lambda)\omega_g(h).$$

Q 4. Soit $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Q 5. Soit $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in \mathcal{T}_n$, on note $\Delta(p)$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(p)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} p(x - t) g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Montrer que Δ définit un endomorphisme de $\mathcal{T}_n$.

Partie B –

I – La fonction J_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction ϕ_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ en posant, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_n(t) = e^{-ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \phi_n(t)^4.$$

Dans cette sous-partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

Q 6. Montrer que pour tout réel t n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$,

$$\phi_n(t) = \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4.$$

Q 7. Montrer que ϕ_n^2 appartient à $\mathcal{T}_n$, puis que f_n appartient à $\mathcal{T}_{2n}$.
Avertissement : *L'énoncé d'origine demandait de montrer que ϕ_n et ϕ_n^2 appartiennent à $\mathcal{T}_n$, ce qui est faux pour ϕ_n dans le cas impair.*

Q 8. Montrer qu'il existe un réel strictement positif c_n tel que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} c_n f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose désormais $J_n = c_n f_n$, de sorte que J_n est une fonction réelle positive vérifiant

$$J_n \in \mathcal{T}_{2n} \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

II – Une majoration de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)\,\mathrm{d}t$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Q 9. Montrer que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi} t f_n(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t}$.

Q 10. Montrer que pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}\, t \leqslant \sin t \leqslant t$.

Q 11. En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} t\, f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3}\,\mathrm{d}u$.

Q 12. En déduire également que $\displaystyle\int_0^{\pi} t\, f_n(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4}\,\mathrm{d}u$.

Q 13. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{a}{n+1}$.

III – Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Dans cette sous-partie, on fixe $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $T_n g$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(x-t) g(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que $(T_n g)$ est une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

Q 14. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x-t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x)\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que $|T_n g(x) - g(x)| \leqslant \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |g(x-t) - g(x)|\,\mathrm{d}t$.

Q 15. *Le cas* $\mathcal{C}^1$. On suppose, seulement dans cette question, que g est $\mathcal{C}^1$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T_n g - g\|_\infty \leqslant \frac{a\|g'\|_\infty}{n+1},$$

où le réel a a été défini à la question **Q 13.**

(b) Conclure que $(T_n g)$ est une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

Q 16. *Le cas* $\mathcal{C}^0$. Dans cette question, on ne suppose plus que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
On rappelle le résultat admis à la question **Q 2.** : $\lim\limits_{h \to 0} \omega_g(h) = 0$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous réels t et x,

$$|g(x-t) - g(x)| \leqslant (1 + n|t|)\,\omega_g(1/n).$$

(b) En déduire qu'il existe $b > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|T_n g - g\|_\infty \leqslant b\,\omega_g(1/n).$$

(c) Conclure que la suite (T_n) converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

Partie C –

Dans cette partie, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{C}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

I –

Dans cette sous-partie on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note T le polynôme $X^n + 1$.

Q 17. Montrer que T admet n racines simples dans $\mathbb{C}$.

On note $z_1, \ldots, z_n$ les racines de T.

Q 18. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\displaystyle\prod_{j \neq k} (z_k - z_j) = T'(z_k)$.

Soit $\ell \in [\![0, n]\!]$. On considère la fraction rationnelle F donnée par $F = \dfrac{X^\ell}{X^n + 1}$.
On rappelle que, par décomposition en éléments simples de F, il y a existence et unicité de $\mu_1, \ldots, \mu_n$ dans $\mathbb{C}$ et de E dans $\mathbb{C}[X]$ tels que

$$F = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{X - z_k} + E.$$

Q 19. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mu_k = -\dfrac{z_k^{\ell+1}}{n}$ et que E est soit le polynôme nul, soit le polynôme constant égal à 1.

Q 20. Calculer $F'(1)$ et en déduire que $\ell = \dfrac{n}{2} + \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k - 1)^2}$.

Q 21. En déduire que :

(a) pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\quad XP'(X) = \dfrac{n}{2} P(X) + \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}$;

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} = -\frac{n^2}{4}$.

II –

Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\| = \sup\limits_{|z|=1} |P(z)|$.

Q 22. Montrer que $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

Q 23. Montrer que, si z est un nombre complexe de module 1 et si $z \neq 1$, alors $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ est un réel négatif.

Q 24. À l'aide de **Q 21.**, en déduire que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\|P'\| \leqslant n\|P\|$.

Q 25. En déduire que pour tout $q \in \mathcal{T}_n$, $\|q'\|_\infty \leqslant 3n\|q\|_\infty$.

Partie D – Fonctions höldériennes

Soit g une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et soit $\alpha \in]0,1]$.
On dit que g est α-höldérienne s'il existe $K > 0$ tel que, pour tous réels x et y de l'intervalle I, $|g(x)-g(y)| \leqslant K|x-y|^\alpha$.

I – Exemples

Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit h_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h_\alpha : x \mapsto x^\alpha$.

Q 26. Soit y un réel positif, montrer que pour tout $x \geqslant y$ on a : $0 \leqslant x^\alpha - y^\alpha \leqslant (x-y)^\alpha$.

Q 27. En déduire que h_α est α-höldérienne sur $\mathbb{R}_+$.

Q 28. Soit $\beta \in]0,1]$ tel que $\beta \neq \alpha$. Montrer que h_α n'est pas β-höldérienne.

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$k : x \longmapsto \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Q 29. Soit $y \in]0,1]$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1-y]$,

$$(x+y)\ln(x+y) - x\ln x \leqslant (y-1)\ln(1-y).$$

Q 30. En déduire que k est α-höldérienne sur $[0,1]$ pour tout $\alpha \in]0,1[$.

II – Espace $\mathcal{H}^\alpha_{2\pi}$ et approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Dans la suite du problème, pour $\alpha \in]0,1[$, on note $\mathcal{H}^\alpha_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions α-höldériennes 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Pour tout $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, on pose $\delta_n(f) = \inf\limits_{p \in \mathcal{T}_n} \|f-p\|_\infty$.

Q 31. Montrer que $\mathcal{H}^\alpha_{2\pi}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0_{2\pi}$.

Q 32. Montrer que si $g \in \mathcal{H}^\alpha_{2\pi}$, alors $\delta_n(g) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

III – Étude d'une réciproque

L'objectif de cette sous-partie est d'établir une réciproque à la question **Q 32.**
On fixe un réel $\alpha \in]0,1[$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ telle que $\delta_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$. Il existe ainsi un réel $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\delta_n(f) \leqslant \dfrac{C}{n^\alpha}$.

Q 33. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $q_n \in \mathcal{T}_n$ tel que $\delta_n(f) = \|f - q_n\|_\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère un polynôme $p_n \in \mathcal{T}_{2^n}$ tel que $\|f - p_n\|_\infty = \delta_{2^n}(f)$.

Q 34. Montrer, en appliquant l'inégalité établie à la question **Q 25.**, qu'il existe un réel $C' > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|p'_{n+1} - p'_n\|_\infty \leqslant C'\, 2^{n(1-\alpha)}.$$

Q 35. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|p'_n\|_\infty \leqslant \|p'_0\|_\infty + \frac{C'}{2^{1-\alpha}-1}\, 2^{n(1-\alpha)}.$$

Q 36. En déduire l'existence d'un réel $A > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|p'_n\|_\infty \leqslant A\, 2^{(1-\alpha)n}.$$

Q 37. Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant C\, 2^{1-n\alpha} + A\, 2^{(1-\alpha)n}\, |x-y|$.

Q 38. En déduire que f est α-höldérienne.
Indication : lorsque $0 < |x-y| \leqslant 1$, on pourra choisir $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant |x-y| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et majorer $|f(x)-f(y)|$ à l'aide de la question précédente.