PSI* 2025/26 DS 4

Décomposition de Frobenius

Notations et définitions

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et n est un entier naturel. On note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour $n \geq 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice unité est notée I_n et on désigne par $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note A^{T} la transposée de la matrice A, $\mathrm{rg}(A)$ son rang, $\mathrm{tr}(A)$ sa trace, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique, et $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$.

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n supérieure ou égale à 2, et $\mathcal{L}(E)$ est l'espace vectoriel des endomorphismes de E. On note f un endomorphisme de E.

On note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f^k \circ f$. On utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme f de E : $\mathrm{rg}(f),\ \mathrm{tr}(f),\ \chi_f$ et $\mathrm{sp}(f)$.

Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m$, $Q(f)$ désigne l'endomorphisme $a_0\mathrm{Id}_E + a_1f + \cdots + a_mf^m$. On note $\mathbb{K}[f]$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ constituée des endomorphismes $Q(f)$ quand Q décrit $\mathbb{K}[X]$.

Enfin, on dit que f est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. On dit en outre dans ce cas qu'un tel vecteur x_0 est *cyclique* pour f.

On pourra utiliser le théorème de Cayley-Hamilton dans le sujet, sauf bien sûr dans la partie IIIA - IIIB où l'on demande d'en faire une démonstration.

I. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q1. Montrer que M et M^{T} ont même spectre.

Q2. Montrer que M^{T} est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

I.B. Matrices compagnons

Q3. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Matrice qui est appelée matrice compagnon associée au polynôme Q.
Déterminer en fonction de Q le polynôme caractéristique de C_Q.

Q4. Soit λ une valeur propre de $(C_Q)^{\mathrm{T}}$. Déterminer le sous-espace propre associé ; on montrera notamment que c'est une droite vectorielle.

Q5. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est-elle toujours semblable à une matrice de la forme C_Q ?

I.C. Endomorphismes cycliques

Q6. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, où Q est un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant 1) et de degré n.

Q7. Soit θ un réel non multiple de π. On note $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et r l'endomorphisme canoniquement associé (ainsi r est la rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique).
Montrer que r est cyclique, que tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$ est cyclique, et que la seule matrice compagnon pouvant représenter l'endomorphisme r est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$.

I.D. Propriétés des endomorphismes cycliques

Soit f un endomorphisme de E, supposé cyclique.

Q8. On suppose que f un endomorphisme cyclique. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

Q9. On suppose encore que f un endomorphisme cyclique. Montrer que $(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$ et que les polynômes annulateurs de f, à part 0, sont de degré supérieur à n.

I.E. Commutant d'un endomorphisme cyclique

On suppose que f est un endomorphisme cyclique et on choisit un vecteur cyclique x_0 dans E, de sorte que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

On appelle commutant de f l'ensemble $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) / \ f \circ g = g \circ f\}$.

Soit $g \in C(f)$, un endomorphisme qui commute avec f.

Q10. Justifier que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

Q11. Justifier l'existence de $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$$

Montrer alors que $g \in \mathbb{K}[f]$.

Q12. Établir que $g \in C(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.

II. Cas particuliers

II.A. Cyclicité des endomorphismes diagonalisables

Q13. On suppose que f est un endomorphisme diagonalisable. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées.

Soit $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ un vecteur de E ; donner une CNS portant sur les scalaires $(u_1, \ldots, u_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ pour que $(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u))$ soit une base de E.

Q14. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice diagonalisable soit cyclique, préciser alors ses vecteurs cycliques.

II.B. Cyclicité des endomorphismes nilpotents

Dans cette sous-partie, on suppose que f est un endomorphisme nilpotent de E. On note r le plus petit entier naturel tel que $f^r = 0$.

Q15. Montrer que f est cyclique si et seulement si $r = n$. Préciser alors la matrice compagnon.

III. Annulateur ponctuel, décomposition de Frobenius

On suppose encore que f un endomorphisme de E, non nécessairement cyclique. L'objectif de cette partie IIIA/IIIB est notamment de prouver le théorème de Cayley-Hamilton ; on est donc prié de ne pas l'utiliser jusqu'à la fin de III.B. !

III.A. Annulateurs ponctuels

Pour chaque vecteur x non nul de E, on note P_x le polynôme unitaire de plus petit degré tel que $P(f)(x) = 0$. On note d_x son degré.

Q16. Justifier que P_x est bien défini.

Q17. On note $e_1 = x, \ldots, e_{d_x} = f^{d_x - 1}(x)$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{d_x})$. Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E stable par f et préciser la matrice de l'endomorphisme induit.

Q18. Justifier que P_x divise χ_f.

III.B. Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

Q19. Démontrer que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

On pourra dorénavant utiliser ce résultat.

III.C. Annulateur ponctuel et annulateur global

Q20. Si χ_f est scindé sous la forme $\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{m_i}$ avec des λ_i distincts et des entiers $m_i > 0$, combien y a-t-il de polynômes unitaires divisant χ_f ?

Q21. Montrer que si la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_r$ de E est un sous-espace vectoriel, alors l'un des sous-espaces F_i contient tous les autres. *On pourra considérer deux points bien choisis y, z et la droite affine $y + \lambda z, \lambda \in \mathbb{K}$ passant par ces deux points.*

Q22. Déduire de III.A. et des questions précédentes qu'il existe $x_1 \in E$ tel que $P_{x_1}(f) = 0$.

III.D. Décomposition de Frobenius

On se propose de poursuivre la démarche de la question III.A. pour démontrer le théorème de décomposition de Frobenius : si E est un espace vectoriel de dimension finie et u est un endomorphisme de E, alors E se décompose en somme directe d'espaces sur lesquels u induit un endomorphisme cyclique. On note qu'une telle décomposition a l'avantage de fonctionner qu'on soit sur le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On fixe un endomorphisme f de E, on note x_1 un point tel qu'introduit dans la dernière question de la partie III.C. On note $P = P_{x_1}$ et $d = \deg(P)$. On note $e_1 = x_1, \ldots, e_d = f^{d_x - 1}(x_1)$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_d)$.
On complète cette famille libre en une base $e_1, \ldots, e_n$ de E. On note enfin e_d^* l'application qui à $x \in E$ associe sa composante sur e_d dans cette base : $e_d^*(x) = x_d \in \mathbb{K}$.

Q23. On pose $F = \{x \in E, \forall k \in \mathbb{N}, e_d^*(f^k(x)) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E stable par f.

Q24. On note $\psi : x \mapsto (e_d^*(x), \ldots, e_d^*(f^{d-1}(x)))$. Montrer que ψ est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}^d$ dont on précisera le noyau. En déduire que $E = E_1 \oplus F$.

Q25. Prouver le théorème de décomposition de Frobenius annoncé en en-tête.

Q26. Enoncer l'analogue matriciel du théorème de Frobenius pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

IV. Applications de la décomposition de Frobenius

On pourra faire appel aux résultats de la partie précédente.

IV.A. Application : caractérisation de la cyclicité

Soit f un endomophisme de E.

Q27. Montrer que f est cyclique si et seulement si $(\mathrm{Id}, f, \ldots, f^{n-1})$ est une famille libre de $L(E)$.

Q28. Soit f un endomophisme de E. Montrer que f est cyclique si et seulement si $\mathbb{K}[f]$ est de dimension n.

IV.B. Application : commutant d'un endomorphisme quelconque

Soit f un endomophisme de E. On rappelle que le commutant de f est l'ensemble $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) /\ f \circ g = g \circ f\}$; c'est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

Q29. Montrer que la dimension de $C(f)$ est supérieure ou égale à n.

Q30. Montrer que f est cyclique si et seulement si $\mathbb{K}[f] = C(f)$.

IV.C. Application : réduction de Jordan des matrices nilpotentes

Q31. Montrer que tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente est semblable à une matrice N dont les coefficients N_{ij} vérifient

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], N_{i+1,i} \in \{0, 1\}, \qquad N_{ij} = 0 \text{ sinon.}$$

Q32. En déduire que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède une unique valeur propre λ, alors elle est semblable à une matrice N telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], N_{i,i} = \lambda, \qquad \forall i \in [\![1, n-1]\!], \qquad N_{i+1,i} \in \{0, 1\}, \qquad N_{ij} = 0 \text{ sinon.}$$

Remarque : si on est sur $\mathbb{C}$,
On peut également prouver que pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$, on a

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(M - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{m_i},$$

appelée décomposition en sous-espaces caractéristiques. La preuve ressemble à celle vue pour la CNS de diagonalisation : partir d'une décomposition polynomiale du polynôme constant 1. Avec les deux questions précédentes, cela termine de prouver le théorème de réduction de Jordan (toute matrice complexe est trigonalisable avec des coefficients nuls, sauf certains sur la sous-diagonale qui valent 1).