PSI* 2008/09 - DL10a - Algèbres de Lie

Dans tout ce problème, n est un entier au moins égal à 1. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients complexes.

On identifiera une matrice colonne X (un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) et le vecteur de $\mathbb{C}^n$ dont les composantes dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ sont les coefficients de la matrice X. Pour $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ l'endomorphisme canoniquement associé de $\mathbb{C}^n$: $\overline{M}$ est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Par ailleurs, $E_\lambda(\overline{M})$ est l'espace propre associé à la valeur propre λ de l'endomorphisme $\overline{M}$.

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ de coefficients $(m_{ij}, i,j = 1,\ldots,n)$ et pour $k = 0,\ldots,n-1$, on appelle k-ième diagonale supérieure de M, notée $D_k(M)$, l'ensemble des coefficients $(m_{i,i+k}, i = 1,\ldots,n-k)$. Une diagonale supérieure $D_k(M)$ est dite nulle lorsque tous ses éléments sont nuls.

Si V et W sont deux espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$, on note p_V la projection sur V parallèlement à W : pour $x = x_V + x_W$ avec $x_V \in V$ et $x_W \in W$, $p_V(x) = x_V$.

Pour un endomorphisme u de $\mathbb{C}^n$, on note u_V sa restriction à V.

I Algèbres de Lie

On appelle crochet de Lie de deux éléments X et Y de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ la matrice, notée $[X,Y]$, définie par

$$[X,Y] = XY - YX.$$

Définition 1 *Soit $\mathcal{U}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. On note $[\mathcal{U}]$ l'espace vectoriel engendré par les crochets de Lie $[X,Y]$ lorsque X et Y décrivent $\mathcal{U}$. On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie lorsque*

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{U}.$$

Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux algèbres de Lie qui vérifient

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}.$$

On souhaite prouver le théorème suivant.

Théorème 1 *Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est une colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$ et si A est une matrice dans $\mathcal{U}$ alors AX est soit la matrice nulle, soit une matrice colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$. De plus, si pour $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda X$ alors $M(AX) = \lambda(AX)$.*

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une matrice colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$, et soit A une matrice de $\mathcal{U}$.

☐ 1 - Établir l'existence d'une forme linéaire λ sur $\mathcal{V}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda(M)X$.

☐ 2 - Montrer que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $[M,A]$ appartient à $\mathcal{V}$.

On considère la suite de matrices colonnes $(X_k, k \geq 0)$ définie par

$$X_0 = X,\ X_{k+1} = AX_k,\ \text{pour tout } k \geq 0.$$

Pour $M \in \mathcal{V}$, on considère la suite de nombres complexes $(\lambda_k(M), k \geq 0)$ définie par

$$\begin{aligned} \lambda_0(M) &= \lambda(M) \\ \lambda_{k+1}(M) &= \lambda_k([M,A]),\ \text{pour tout } k \geq 0. \end{aligned}$$

☐ 3 - Démontrer, pour tout entier $i \geq 0$ et pour tout $M \in \mathcal{V}$, les identités suivantes :

$$MX_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M) X_j \tag{1}$$

$$[M,A]\,X_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M) X_j. \tag{2}$$

☐ 4 - On identifie dorénavant matrices colonnes et vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Démontrer qu'il existe un plus grand entier q tel que la famille de vecteurs $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_q\}$ soit libre.

On note G l'espace vectoriel engendré par la famille $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_q\}$.

☐ 5 - Montrer que $\overline{M_G}$, $\overline{A_G}$ et $\overline{[M,A]_G}$ sont des endomorphismes de G.

☐ 6 - Calculer la trace de $\overline{[M,A]_G}$.

☐ 7 - Quelle est la matrice de $\overline{[M,A]_G}$ dans la base $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_q\}$?

☐ 8 - Pour $M \in \mathcal{V}$, que vaut $\lambda([M,A])$?

☐ 9 - Établir le théorème 1.

II Algèbres de Lie résolubles

Définition 2 *Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie et p un entier naturel non nul. On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur p lorsqu'il existe des algèbres de Lie $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1, \ldots,$ $\mathcal{U}_p$ telles que :*

$$\{0\} = \mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}_{p-1} \subset \cdots \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \qquad \text{(A)}$$

$$[\mathcal{U}_i] \subset \mathcal{U}_{i+1} \textit{ pour tout } i \in \{0, \ldots, p-1\} \qquad \text{(B)}$$

On se propose de montrer le théorème suivant.

Théorème 2 *$\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble si et seulement s'il existe une matrice P inversible telle que, pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure.*

Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{T}_P$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ telles que $P^{-1}MP$ soit tiangulaire supérieure.

☐ 10 - Traduire la propriété "il existe une matrice P inversible telle que, pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure" en une propriété sur les endomorphismes canoniquement associés aux éléments de $\mathcal{U}$.

☐ 11 - Montrer que $\mathcal{T}_P$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur n.
On pourra considérer les sous-espaces $\mathcal{N}_k$ $(0 \leq k \leq n)$ tels que $\mathcal{N}_0 = \mathcal{T}_P$ et pour tout entier k $(1 \leq k \leq n)$, $\mathcal{N}_k$ est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{T}_P$ telles que les k diagonales supérieures $D_0(P^{-1}MP)$, $D_1(P^{-1}MP)$, ..., $D_{k-1}(P^{-1}MP)$ sont nulles.

Dans les questions 12 à 17, on suppose que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur $p = 1$.

☐ 12 - Montrer que pour tout $M, M' \in \mathcal{U}$, on a $MM' = M'M$.

☐ 13 - Pour cette question on admettra le fait suivant (déjà prouvé en exercice) : une matrice complexe admet au moins une valeur propre.
Soit r un entier non nul et une famille $M_1, M_2, \ldots, M_r$ d'éléments de $\mathcal{U}$. Montrer qu'il existe un vecteur propre commun aux endomorphismes $\overline{M_1}, \overline{M_2}, \ldots, \overline{M_r}$.

☐ 14 - Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\{\overline{M},\ M \in \mathcal{U}\}$.

On note dorénavant :

$$\overline{\mathcal{U}} = \{\overline{M},\ M \in \mathcal{U}\}.$$

Soit F et H deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$ et u et v deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. De plus, on suppose, d'une part, que F est stable par u et v et, d'autre part, que u et v commutent.

☐ 15 - Montrer les relations suivantes :
$$p_H u = p_H u p_H \text{ et } p_H v = p_H v p_H.$$

☐ 16 - Montrer que $p_H u p_H$ et $p_H v p_H$ commutent puis que $p_H u_H$ et $p_H v_H$ commutent.

☐ 17 - En procédant par récurrence sur n, établir le théorème 2 dans le cas $p = 1$.

Soit, maintenant, $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie résoluble de longueur $p > 1$.

On suppose établi que pour toute algèbre de Lie résoluble de longueur inférieure strictement à p, il existe un élément $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, inversible, tel que pour toute matrice M dans cette algèbre, $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure.

☐ 18 - Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\overline{M}$, $M \in \mathcal{U}_1$.

Soit X l'un de ces vecteurs propres. On note E l'espace vectoriel engendré par X et les éléments de la forme
$$\overline{A_1} \dots \overline{A_k}\, X$$
où k est un entier non nul, $A_j \in \mathcal{U}$ pour tout j.

☐ 19 - Montrer que E est un espace vectoriel stable par tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}}$ et que tous les éléments de E sont des vecteurs propres communs à tous les endomorphismes de $\overline{\mathcal{U}_1}$.

Soit $M, M' \in \mathcal{U}$.

☐ 20 - Montrer que $\overline{[M, M']}_E$ est une homothétie de trace nulle.

☐ 21 - Que peut-on en déduire ?

Le théorème 2, dans le cas général, se prouve alors par les mêmes raisonnement qu'aux questions 14 et 17.