PSI* 2020/21 DL 4

Applications semi-linéaires, réduction

Consignes

- à rendre pour le jeudi 6 octobre (ce qui peuvent le rendent plus tôt pour que je m'avance, et peuvent réclamer du rab)
- travail demandé : le sujet complet si possible. En cas de manque de temps, laisser les questions 7 et 8, voire 6.d.

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel complexe de dimension finie $n \geq 1$. Une application u de E dans lui-même est dite semi-linéaire si elle vérifie, pour tout scalaire a et tout couple de vecteurs (x, y) de l'espace vectoriel E, $u(ax + y) = \overline{a}u(x) + u(y)$.

Un nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u s'il existe un vecteur x différent de 0 tel que $u(x) = \mu x$. On dit alors que x est un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre μ.

I Premières propriétés

On étudie dans cette section les valeurs et les vecteurs co-propres d'une application semi-linéaire u donnée.

a. Montrer que pour un vecteur $x \in E$ distinct de 0 donné, il existe au plus un complexe μ tel que $u(x) = \mu x$.

b. Montrer que si μ est une valeur co-propre de u, pour tout réel θ, le complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore une valeur co-propre de u. En donner un vecteur co-propre associé, en fonction de x, vecteur co-propre associé à μ, et de θ.

c. Etant donnée une valeur co-propre μ de u, on pose $E_\mu = \{x \in E, u(x) = \mu x\}$. Est-ce que cet ensemble est un espace vectoriel complexe ? réel ?

d. Etant données deux applications semi-linéaires u et v, étudier la linéarité de l'application composée $u \circ v$.

II Matrice associée à une application semi-linéaire

Soit une application semi-linéaire u donnée. Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E. A un vecteur x, de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ est associée une matrice-colonne X, d'éléments $x_1, \ldots, x_n$, appelée (abusivement) vecteur. On note $\overline{X}$ la matrice complexe conjuguée de X.

a. On souhaite définir la notion de "matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associée à une application semi-linéaire u". On veut que, dans la base choisie, la relation $y = u(x)$ s'écrive $Y = A\overline{X}$. Comment doit-on définir la matrice A ?

b. On reprend la définition introduite dans la question précédente. On note A et B les matrices respectivement associées à une même application semi-linéaire u dans les bases $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Soit S la matrice de passage de la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ à la base $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$. Exprimer la matrice B en fonction des matrices A et S.

Etant donnée une matrice carrée A, complexe, d'ordre n, le vecteur X non nul est dit vecteur co-propre de la matrice A, associé à la valeur co-propre μ, si la relation matricielle $A\overline{X} = \mu X$ a lieu. Si on a une relation $AX = \mu X$ pour un vecteur X non nul, X est dit vecteur propre associè à la valeur propre μ.

III Exemples

a. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Rechercher les valeurs co-propres, et les vecteurs co-propres associés.

b. Soit une matrice A réelle admettant une valeur propre λ réelle également, et soit un vecteur propre X associé. Exhiber un vecteur propre associé à λ qui est réel.
En déduire que A admet au moins une valeur co-propre.

IV Une relation d'équivalence

Etant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n, s'il existe une matrice complexe S inversible telle que $B = SA\overline{S}^{-1}$, les deux matrices A et B sont dites co-semblables. On note alors $A \sim B$.

a. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n.

b. Soit $S \in Gl_n(\mathbb{C})$; soit A la matrice définie par la relation $A = S\overline{S}^{-1}$.
Calculer la matrice produit $A\overline{A}$.

c. Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n telle que $A\overline{A} = \mathrm{I}_n$. Démontrer qu'il existe au moins un réel θ tel que la matrice $S(\theta)$ définie par

$$S(\theta) = e^{i\theta} A + e^{-i\theta}\,\mathrm{I}_n$$

soit inversible. Calculer, en donnant au réel θ cette valeur, la matrice $A\overline{S(\theta)}$. Calculer la matrice $S(\theta)\overline{S(\theta)}^{-1}$.
En déduire une caractérisation des matrices co-semblables à I_n.

V Indépendance des vecteurs co-propres

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n. Soient $X_1, \dots, X_k$, k vecteurs co-propres, associés à des valeurs co-propres $\mu_1, \dots, \mu_k$. On suppose que les modules des valeurs co-propres sont tous distincts ($p \neq q \Rightarrow |\mu_p| \neq |\mu_q|$).

Montrer que la famille $(X_1, \dots, X_k)$ est libre. En déduire $k \leq n$.

VI Correspondance entre valeurs co-propres de A et valeurs propres de $A\overline{A}$

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n.

a. Montrer que si μ est valeur co-propre de A, alors $|\mu|^2$ est valeur propre de $A\overline{A}$.

b. Soit $\lambda \geq 0$ une valeur propre de $A\overline{A}$. et X un vecteur propre associé. Montrer que le réel $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de A en séparant les cas suivants
- X et $A\overline{X}$ sont liés
- ou X et $A\overline{X}$ sont linéairement indépendants.

c. En déduire que pour que le réel positif ou nul μ soit valeur co-propre de la matrice A, il faut et il suffit que le réel μ^2 soit valeur propre de la matrice $A\overline{A}$.

d. Application : déterminer suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$, les valeurs co-propres réelles positives de $A_m = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

VII Cas d'une matrice triangulaire supérieure.

a. Montrer que les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure sont ses coefficients diagonaux.

b. Soit A une matrice triangulaire supérieure. Montrer que si λ est valeur propre de A, alors pour tout réel θ, $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de A.

c. Soit A une matrice triangulaire supérieure. Montrer que si μ est valeur co-propre de A, il existe un réel θ, tel que $\mu e^{i\theta}$ est une valeur propre de A.

d. Soit $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. Montrer que 1 est valeur co-propre de A ; donner un vecteur co-propre associé ; on posera $X = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$.

VIII Une caractérisation des valeurs co-propres

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n ; soient B et C les matrices réelles définies par la relation $A = B + iC$.
Montrer que le nombre complexe μ est valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre réel $|\mu|$ est une valeur propre de la matrice D, carrée rélle d'ordre $2n$, définie par blocs par

$$D = \begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix}$$