PSI* 2025/26 DL 8 bis

Convergence uniforme de séries trigonométriques

Le but de ce problème est d'étudier les sommes de séries trigonométriques de la forme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, où la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive, décroissante et de limite nulle. La première partie est consacrée à des propriétés générales ; la seconde à l'étude de la convergence uniforme de la série sur l'intervalle $[0, \pi]$; la troisième à l'étude de l'intégrale $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$; enfin, dans la quatrième, on examine un exemple particulier.

Première partie

Pour tout entier $n > 0$ on définit des fonctions E_n, A_n, f_n sur $[0, \pi]$ par :

$$E_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx \qquad a_n(x) = (b_n - b_{n+1})E_n(x) \qquad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$$

1.

a/ Vérifier que l'on a

$$2\sin\frac{x}{2}E_n(x) = \cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x$$

b/ Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$f_n(x) = b_{n+1}E_n(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$$

c/ En déduire que la suite (f_n) converge simplement sur l'intervalle $[0, \pi]$. On notera f sa limite simple.

2.

a/ Établir l'inégalité suivante, lorsque $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\sin\frac{x}{2}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right| \leq b_{n+1} - b_{n+p+1}$$

b/ Établir l'inégalité

$$\sin\frac{x}{2}|f(x) - f_n(x)| \leq 2b_{n+1}$$

c/ Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[\alpha, \pi]$, où $0 < \alpha < \pi$. Que peut-on dire de la fonction f, limite simple de la suite (f_n) ?

3.

a/ Établir que, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$.

b/ Montrer que, pour tout entier $m > 0$, la fonction $x \mapsto \sin mx f(x)$ est continue sur $[0, \pi]$, et calculer son intégrale sur cet intervalle.

Deuxième partie

4. On suppose que la suite $(nb_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, et on pose $\varepsilon_n = \sup\limits_{k\geq n}(kb_k)$. Pour tout $x \in]0,\pi]$ on note p la partie entière de $\frac{\pi}{x}$, de sorte que l'on a $p \leq \frac{\pi}{x} < p+1$.

a/ Vérifier les inégalités suivantes :

$$|\sum_{k=n}^{n+p-1} b_k \sin kx| \leq \pi\varepsilon_n \qquad |\sum_{k=n+p}^{\infty} b_k \sin kx| \leq 2\varepsilon_n$$

b/ Déduire de ce qui précède que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,\pi]$.

5. Montrer que, réciproquement, si la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,\pi]$, la suite (nb_n) tend vers 0. *Indication : on pourra établir qu'il existe une constante C telle que, pour tout n,*

$$\sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin\frac{k\pi}{4n} \geq Cnb_{2n}\,.$$

Troisième partie

On se propose ici d'établir l'équivalence des conditions :

(i) f est intégrable sur $]0,\pi[$

(ii) la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{b_n}{n}$ converge

On pose $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.

6.

a/ Vérifier que l'on a :

$$\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \pi\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)s_n + \frac{2\pi}{n}b_{n+1}\,.$$

Indication : on pourra écrire $f(x) = f_n(x) + f(x) - f_n(x)$ et utiliser la question **2.b.**.

b/ Montrer que (ii) implique (i).

7. Déterminer la limite de $\frac{s_n}{n}$.

8. On veut prouver que (i) implique (ii). On pose, pour tout $x \in]0,\pi]$:

$$F(x) = \int_x^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k}, \qquad \lambda = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{b_k}{k}$$

a/ Vérifier que pour tout $x \in]0,\pi]$ l'on a :

$$\sigma_n = \lambda + F(x) + \sum_{k=1}^{n} b_k \int_0^x \sin kt\,\mathrm{d}t - \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{b_k}{k}\cos kx\,.$$

b/ Montrer que $\left|\sum_{k=1}^{n} b_k \int_0^{\frac{1}{n}} \sin kt\,\mathrm{d}t\right|$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

c/ Montrer que $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{b_k}{k}\cos\frac{k}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. *Indication : on pourra écrire* $\sin\frac{1}{2n}\cos\frac{k}{n}$ *comme demi-différence de deux sinus.*

d/ Conclure.

Quatrième partie

Cette partie est consacrée à l'étude du comportement de f au voisinage de 0 dans le cas où $b_n = \frac{\ln n}{n}$.

9. On note ψ une fonction continue, positive, décroissante et intégrable sur $]0, a]$. Vérifier que

$$\int_0^a \psi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to 0} \sum_{1\leq n\leq a/x} x\psi(nx).$$

10. Soit ϕ une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs réelles, telle qu'il existe $a > 0$ et $b > 0$ vérifiant que :
(i) la fonction $x \mapsto \phi(x)\sin x$ est positive, décroissante et intégrable sur $]0, a]$.
(ii) ϕ est positive, décroissante sur $[b, +\infty[$ et de limite nulle à l'infini.

a/ Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer un nombre $A > 0$ tel que l'on ait pour tout $x \in]0, \pi]$:

$$\Big|\sum_{k\geq \frac{A}{x}} x\varphi(kx)\sin kx\Big| \leq \varepsilon\ .$$

on n'oubliera pas d'établir la convergence de cette série.

b/ Montrer que les limites suivantes existent et ont la même valeur :

$$\lim_{X\to+\infty} \int_0^X \phi(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} x\phi(nx)\sin nx\ .$$

11. On pose $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \sin nx$.

a/ f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

b/ Montrer que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0, et trouver une constante c telle que $f(x) - c\ln x$ admette une limite finie en 0. *Indication : on pourra écrire* $\frac{\ln n}{n} = x\frac{\ln(nx)}{nx} - x\frac{\ln x}{nx}$ *et développer en série de Fourier - on admettra que c'est possible - la fonction* g *impaire, périodique de période* 2π *et telle que* $g(x) = \frac{\pi - x}{2}$ *sur* $]0, \pi[$.

c/ f est-elle de carré intégrable ?