PSI* 2025/26 DL 9

Théorème de Müntz

On désigne par $C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. On utilise les deux normes classiques N_∞ ou N_2 définies par :

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour tout $\lambda \geq 0$, on note ϕ_λ l'élément de $C([0,1])$ défini par $\phi_\lambda(x) = x^\lambda$. Par convention on a posé $0^0 = 1$ de sorte que ϕ_0 est la fonction constante 1.

Un résultat classique d'analyse, le théorème de Weierstrass, permet d'affirmer que l'espace $\mathcal{W} = \mathbb{R}[X]$ des fonctions polynomiales est dense dans E pour les normes N_∞ ou N_2. Cela signifie que toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme (ou en norme 2) d'une suite de fonctions polynômes. L'objectif est ici en s'appuyant sur ce résultat (qui sera admis), de le généraliser.

Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ≥ 0 deux à deux distincts. On note W le sous- espace vectoriel de $C([0,1])$ engendré la famille $(\phi_{\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Le but du problème est d'établir des critères de densité de l'espace W dans $C([0,1])$ pour l'une ou l'autre des deux normes choisies.

La question préliminaire et les parties I,II sont indépendantes ;
les parties suivantes n'utilisent que les conclusions finales des précédentes.

Question préliminaire

Q1. Montrer que $(\phi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ est une famille libre de $C([0,1])$.

I Déterminants de Cauchy

On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ de réels telles que $a_k + b_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leq n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_m} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_m+b_1} & \frac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}.$$

On définit la fonction suivante, en tout point $x \in \mathbb{R} \setminus \{b_1, \ldots b_n\}$: $R(x) = \dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}(x-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(x+b_k)}$.

Q2. Prouver que, si les b_k sont distincts, $R(x)$ peut se mettre sous la forme $R(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{x+b_k}$, avec des coefficients A_k que l'on précisera. *On demande une preuve, sans supposer connu de résultat de décomposition en éléments simples.*

Q3. En supposant encore que les b_k sont distincts, montrer que $A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$. *Pour cela, on pourra considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par*

$$\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}.$$

Q4. En déduire que

$$D_n = \frac{\prod\limits_{1\leq i<j<\leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} (a_i + b_j)}.$$

II Distance à un sous-espace de dimension finie

Dans cette partie, on suppose que la norme sur l'espace vectoriel E est définie à partir d'un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sur E : $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$. On note pour $x \in E$ et V partie non vide de E,

$$d(x, V) = \inf\{\|x - v\|, v \in V\}$$

Q5. Montrer que si V est un sous-espace vectoriel *de dimension finie* de E, alors pour tout $x \in E$, la projection orthogonale de x sur V est l'unique élément $y \in V$ vérifiant $d(x, V) = \|x - y\|$.

Pour toute suite finie $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, on désigne par $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le déterminant de la *matrice de Gram* d'ordre n définie par :

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1|x_1\rangle & \langle x_1|x_2\rangle & \cdots & \langle x_1|x_n\rangle \\ \langle x_2|x_1\rangle & \langle x_2|x_2\rangle & \cdots & \langle x_2|x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_n|x_1\rangle & \langle x_n|x_2\rangle & \cdots & \langle x_n|x_n\rangle \end{pmatrix}.$$

Q6. Montrer que $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée.

Q7. On suppose que la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$d(x, V)^2 = \frac{G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Si vous séchez ici, demandez des indications.

III Un critère de densité de W pour la norme N_2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n l'espace vectoriel engendré par la famille finie $(\phi_{\lambda_k})_{0\leq k\leq n}$.

Grâce au théorème de Weierstrass, pour prouver que l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2, il est suffisant d'approcher toute fonction monôme ϕ_μ, $\mu \in \mathbb{N}$. On dispose ainsi d'une condition nécessaire et suffisante simple et naturelle, que l'on admettra :

$$\text{condition de densité } (C) : \text{pour tout entier } \mu \geq 0, \qquad \lim_n d(\phi_\mu, W_n) = 0$$

Q8. Montrer que pour tout $\mu \geq 0$,

$$d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu + 1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$$

Q9. Montrer que pour tout $\mu \geq 0$, la suite $\left(\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 si et seulement si la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. *On pourra pour cela étudier les variations de la fonction* $x \in [0, \mu] \mapsto \dfrac{\mu - x}{x + \mu + 1}$.

Q10. En déduire que l'espace W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 si et seulement si la série $\sum_k \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

IV Un critère de densité de W pour la norme N_∞

De nouveau, on pourra considérer que pour montrer que W est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$ au sens de la norme N_∞, il est suffisant, pour toute fonction monôme ϕ_μ, $\mu \in \mathbb{N}$, de pouvoir l'approcher par une suite de fonctions au sens de N_∞.

Q11. Montrer que si W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_∞, alors la série $\sum_k \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

Q12. Soit $\psi = \sum_{k=0}^n a_k\phi_{\lambda_k}$ un élément quelconque de W_n. Montrer que si $\lambda_k \geq 1$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, alors pour tout $\mu \geq 1$, on a :

$$N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leq N_2\big(\mu\phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_k\phi_{\lambda_k-1}\big).$$

Q13. On suppose que la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (i): & \lambda_0 = 0 \\ (ii): & \lambda_k \geq 1 \text{ pour tout } k \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que sous ces conditions, si la série $\sum_k \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente, alors W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_∞.

Q14. Montrer que la conclusion précédente est encore valable si on remplace la condition (ii) par la condition plus faible :

$$(ii') : \qquad \inf_{k\geq 1} \lambda_k > 0$$

V Annexe : questions du sujet original

Je les ai coupées mais vous pouvez les regarder.

Une partie sur la distance d'un point à une partie d'un espace normé

Soit E un espace vectoriel normé par une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que la distance d'un élément $x \in E$ à une partie non vide A de E est le réel noté $d(x, A)$ défini par :

$$d(x, A) = \inf_{y\in A} \|x - y\|$$

— Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si x est adhérent à A.

— Montrer que si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de parties de E et si $A = \bigcup_{n\geq 0} A_n$ alors $d(x, A) = \lim_{n\to\infty} d(x, A_n)$.

On considère un sous-espace vectoriel V *de dimension finie* de E, et on note $B = \big\{y; \|y - x\| \leq \|x\|\big\}$.

— Montrer que $B \cap V$ est fermée bornée et que $d(x, V) = d(x, B \cap V)$ pour tout $x \in E$.

— En déduire que pour tout $x \in E$, il existe un élément $y \in V$ tel que $d(x, V) = \|x - y\|$.

Une partie pour comparer l'étude avec les normes N_∞ et N_2 et justifier les conditions de densité

Pour toute partie A de $C([0, 1])$, on note $\overline{A}^\infty$ et $\overline{A}^2$ les adhérences de A pour les normes N_∞ et N_2 respectivement. Pour $f \in C([0, 1])$, la notation $d(f, A)$ désigne toujours la distance de f à A *relativement à la norme* N_2 (on ne considérera jamais, dans l'énoncé, la distance d'un élément à une partie relativement à la norme N_∞).

— Montrer que pour tout $f \in C([0, 1])$, $N_2(f) \leq N_\infty(f)$. En déduire que pour toute partie A de $C([0, 1])$, on a $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$.

On considère l'ensemble $V_0 = \big\{f \in C([0, 1]); f(0) = 0\big\}$, et on rappelle que ϕ_0 désigne la fonction constante 1.

- Montrer que $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$.
- En déduire que V_0 est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2, mais n'est *pas* dense pour la norme N_∞.
- Montrer que si V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors son adhérence $\overline{V}$ est également un espace vectoriel.
- Montrer qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0,1])$ est dense pour la norme N_∞ si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^\infty$.
- En déduire qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0,1])$ est dense pour la norme N_2 si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^2$.