

Transformations de Householder à coefficients entiers

Source : Centrale 2005 PC reconfigurée

Pour une matrice Q , note q_{ij} le coefficient de Q sur la i -ième ligne et la j -ième colonne de Q .

Soit un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On considère A , une matrice *symétrique réelle* d'ordre n et dont les coefficients sont des *entiers naturels*. On suppose en outre que les coefficients diagonaux de A valent tous $a_{ii} = 1$.

On désigne par M la matrice réelle, carrée d'ordre n , dont les coefficients m_{ij} sont donnés par

$$m_{ij} = \begin{cases} -\cos \frac{\pi}{a_{ij}} & \text{si } a_{ij} \neq 0, \\ -1 & \text{si } a_{ij} = 0 \end{cases}$$

On remarque notamment que M est symétrique réelle, et que les coefficients de sa diagonale principale valent $m_{ii} = 1$.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base de E . Pour chaque entier i , $1 \leq i \leq n$, on note σ_i l'endomorphisme de E caractérisé par

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \sigma_i(e_j) = e_j - 2m_{ij}e_i$$

On note τ l'endomorphisme de E donné par $\tau = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_n$.

On note S_i et T les matrices représentatives des endomorphismes σ_i et τ dans la base $\mathcal{B}$.

Partie I - Etude du cas $n = 2$

Dans cette partie I on suppose $n = 2$ et on pose pour alléger les notations

$$a = a_{12} = a_{21}, \quad m = m_{12} = m_{21}$$

I.A -

I.A.1) Expliciter M en fonction de m puis en fonction de a .

I.A.2) Expliciter en fonction de m les matrices S_1, S_2 et vérifier que $T = \begin{pmatrix} 4m^2 - 1 & 2m \\ -2m & -1 \end{pmatrix}$.

I.B - On suppose dans cette question I.B que $a \in \{0, 1\}$ et donc que $|m| = 1$.

I.B.1) Déterminer les valeurs propres de τ .

I.B.2) La matrice T est-elle diagonalisable (justifier) ?

I.B.3) Montrer que τ est d'ordre infini, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'entier naturel k strictement positif tel que $\tau^k = \text{Id}$.

I.C - On suppose dans cette question I.C que l'entier a est supérieur ou égal à 2, et donc que $|m| < 1$.

On définit une forme bilinéaire ϕ sur $E \times E$ par

$$\phi(xe_1 + ye_2, x'e_1 + y'e_2) = xx' + yy' + m(xy' + x'y)$$

pour tous réels x, y, x', y' .

I.C.1) Montrer que ϕ est un produit scalaire.

Muni de ce produit scalaire, E est un plan euclidien que nous noterons aussi E .

I.C.2) Pour quelle valeur de a la base $\mathcal{B}$ est-elle orthonormale ?

Attention, dans la suite on n'imposera pas cette condition sur a ; on ne suppose donc pas nécessairement $\mathcal{B}$ orthonormale.

I.C.3) Montrer que σ_1 et σ_2 sont des symétries orthogonales et préciser par rapport à quelles droites.

I.C.4) Montrer que τ est une rotation ; donner son angle au signe près. En déduire que τ est d'ordre a , c'est-à-dire que a est le plus petit entier strictement positif k tel que $\tau^k = \text{Id}$.

I.C.5) Si on suppose que $\mathcal{B}$ est une base directe (mais pas forcément orthonormale), préciser l'angle de la rotation τ .

I.D - On suppose dans cette question que $a \in \{2, 3, 4, 6\}$.

I.D.1) Dans chacun des cas $a = 2, 3, 4, 6$, déterminer un réel $\mu_a \in [1, 2[$ tel que les matrices associées à σ_1 et σ_2 relativement à la base $(e_1, \mu_a e_2)$ aient tous leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$.

I.D.2) Question supprimée

Partie II - Etude du cas général

Dans cette partie n désigne un entier quelconque supérieur ou égal à 2.

II.A -

II.A.1)

- Pour i compris entre 1 et n calculer $\sigma_i(e_i)$
- Exprimer $\sigma_i^2 = \sigma_i \circ \sigma_i$ en fonction de l'identité.
- Montrer que $E = \ker(\sigma_i - \text{Id}) \oplus \ker(\sigma_i + \text{Id})$.

II.A.2) On pose $\varepsilon_1 = e_1$ et pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, $\varepsilon_k = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_{k-1}(e_k)$.

- Montrer par récurrence sur $i < k$ que pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$ on a

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_i(e_k) = e_k - 2 \sum_{j=1}^i m_{jk} \varepsilon_j$$

- Vérifier que la famille $\mathcal{F} = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E .

II.A.3)

- Exprimer $\tau(e_n)$ en fonction de ε_n .
- Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on a

$$\tau(e_k) = -\varepsilon_k - 2 \sum_{j=k+1}^n m_{jk} \varepsilon_j$$

II.A.4) Soit C la matrice carrée d'ordre n , triangulaire supérieure, dont les coefficients sont donnés par

$$c_{ij} = \begin{cases} 2m_{ij} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

On désigne par P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{F}$.

- Exprimer P^{-1} en fonction de C
- Montrer que $T = -(I+C)^{-1}(I + {}^t C)$
- En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\det(\lambda I - T) = \det((\lambda + 1)I + \lambda C + {}^t C)$$

II.B - Soient i, j vérifiant $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$. On note E_{ij} le sous-espace vectoriel de E engendré par e_i et e_j .

II.B.1)

- a) Montrer que $\dim E_{ij} = 2$.
- b) Montrer que E_{ij} est stable par $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_i \circ \sigma_j$ et $\sigma_j \circ \sigma_i$.

On note π_{ij} et π_{ji} les restrictions de $\sigma_i \circ \sigma_j$ et $\sigma_j \circ \sigma_i$ à E_{ij} .

- c) Donner les matrices Π_{ij} et Π_{ji} associées à π_{ij} et π_{ji} relativement à la base (e_i, e_j) de E_{ij} .
- d) Vérifier que Π_{ij} et Π_{ji} sont inverses l'une de l'autre ; pouvait-on prévoir ce résultat ?

II.B.2)

- a) Montrer que si pour tous i, j on a $a_{ij} \in \{0, 1\}$ alors π_{ij} et π_{ji} sont d'ordre infini.
- b) Quels sont les ordres de π_{ij} et π_{ji} lorsque $a_{ij} \geq 2$?

Partie III - Un exemple dans le cas $n = 3$

On suppose dans cette partie que $n = 3$ et que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

III.A -

III.A - 1) Ecrire les matrices S_1, S_2, S_3 de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ dans la base $\mathcal{B}$.

III.A - 2) Montrer qu'il existe une base de E de la forme $(\nu_1 e_1, \nu_2 e_2, \nu_3 e_3)$ dans laquelle les matrices représentatives de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont toutes à coefficients entiers.

III.B - On définit la forme bilinéaire Φ sur $E \times E$ par

$$\Phi \left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 m_{ij} x_i y_j$$

En utilisant éventuellement l'information suivante (qu'une machine établit facilement), vérifier que Φ est un produit scalaire :

$$\det(\lambda I - M) = (\lambda - 1) \left(\lambda - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \left(\lambda - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$$

On considèrera donc E comme un espace vectoriel euclidien muni de ce produit scalaire.

III.C - On s'intéresse à un endomorphisme σ_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

III.C - 1) Montrer que σ_i est une symétrie par rapport à un plan.

III.C - 2) Déterminer pour chaque i l'orthogonal de e_i et montrer que σ_i est une réflexion de l'espace (symétrie orthogonale par rapport à un plan).

III.D - Montrer que $\tau' = -\tau$ est une rotation de l'espace. En préciser l'axe.

Quel est l'ordre de τ' , c'est-à-dire le plus petit entier $k > 0$ tel que $(\tau')^k = \text{Id}$? Quel est l'ordre de τ ?

Partie IV - Etude d'une situation particulière

On suppose dans cette section que

- (i) $n \geq 3$
- (ii) $a_{ij} = 2$ pour $1 < |i - j| < n - 1$
- (iii) $n \geq 3$, $\{a_{12}, a_{23}, \dots, a_{n-1, n}, a_{n1}\} \subset \{3, 4, 6\}$.

On pose $\beta_n = 2m_{1n}$ et $\beta_i = 2m_{i, i+1}$ pour $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

On désigne par p (resp. q) le nombre (i, j) , $i < j$ tels que $a_{ij} = 4$ (resp. $a_{ij} = 6$).

IV.A. Montrer que si p et q sont pairs, alors il existe un n -uplet de réels $(\nu_1, \dots, \nu_n)$ tel que les matrices de tous les σ_k pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ relativement à la base $(\nu_1 e_1, \dots, \nu_n e_n)$ ont leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$.

IV.B. $\det(\lambda I - T)$ est un polynôme réel en λ , de degré n , que l'on écrira $\det(\lambda I - T) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k$.

IV.B - 1) Rappeler la valeur de α_n et celle de α_{n-1} (on ne demande pas de le rejustifier).

IV.B - 2) On peut trouver à l'aide d'une machine et on admettra, que pour $n = 3$,

$$\det(\lambda I - T) = \lambda^3 + \lambda^2(3 - (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) + \beta_1\beta_2\beta_3) + \lambda(3 - (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) + \beta_1\beta_2\beta_3) + 1$$

Montrer que

$$\alpha_{n-1} = n - \sum_{i=1}^n \beta_i^2 + (-1)^{n+1} \beta_1 \dots \beta_n$$

(on pourra utiliser la question II.A.4. et démontrer la relation par récurrence sur n).

IV.C.

IV.C - 1) Montrer que s'il existe une base de E dans laquelle toutes les matrices des σ_k ont tous leurs coefficients entiers, alors la trace de τ est un entier.

IV.C - 2) Montrer que si p est impair ou q est impair, alors la trace de τ est irrationnelle.

IV.C - 3) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de tous les σ_k ont tous leurs coefficients entiers si et seulement si p et q sont pairs.