

Exponentielle de matrice

Sujet Centrale PSI2013, quasi conforme à l'original : une question utilisant numpy enlevée, une autre ajoutée.

Le but du sujet est d'étudier l'exponentielle de matrices, réelles ou complexes. Dans tout le sujet, p désigne un entier naturel non nul. Si $\mathbb{K}$ désigne un corps, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on adopte les notations suivantes.

- $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}_p[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus p .
- $M_p(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- I_p est la matrice identité de $M_p(\mathbb{K})$.
- Une matrice $A \in M_p(\mathbb{K})$ est dite antisymétrique si $A^\top = -A$.
- $GL_p(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $M_p(\mathbb{K})$.
- On note Tr l'application trace et $\det$ l'application déterminant.
- $O_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients dans $\mathbb{R}$ d'ordre p .
- $SO_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $O_p(\mathbb{R})$ de déterminant 1.
- On munit $M_p(\mathbb{K})$ de la norme quadratique $\|\cdot\|_2$ définie par

$$\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in M_p(\mathbb{K}), \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2} = \sqrt{\text{Tr}(\overline{A}^\top A)}$$

et on munit $M_p(\mathbb{K})$ de la structure d'espace vectoriel normé associé.

- Si $A \in M_p(\mathbb{K})$, on note u_A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ canoniquement associé à la matrice A et, par abus de notation, $\ker(A) = \ker(u_A)$.
- Si $A \in M_p(\mathbb{K})$ on définit, lorsque cette limite existe,

$$E(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_p + \frac{1}{n} A \right)^n$$

- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique d'espace euclidien.

I Question préliminaire.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

- A. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le module et un argument de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ en fonction de a, b et n .
- B. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

II Matrices antisymétriques réelles d'ordre 2 ou 3.

A. Matrices antisymétriques d'ordre 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

A.1 Déterminer un nombre $\beta_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$\frac{1}{\beta_n} \left(I_2 + \frac{1}{n} A \right) \in SO_2(\mathbb{R})$$

A.2 Déterminer un nombre réel θ_n tel que

$$\frac{1}{\beta_n} \left(I_2 + \frac{1}{n} A \right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}$$

A.3 En déduire que $E(A)$ existe et que c'est une matrice de rotation, dont on précisera l'angle.

B. Matrices antisymétriques d'ordre 3.

B.1 Soit $B \in M_3(\mathbb{R})$ antisymétrique.

- Montrer que $\det(B) = 0$.
- Montrer que $(\ker(u_B))^\perp$ est stable par u_B .
- En déduire que B est de rang 0 ou 2.

B.2 Montrer qu'il existe une matrice P de $O_3(\mathbb{R})$ et un réel β tels que

$$B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

B.3 Montrer que lorsque l'égalité de la question précédente est vérifiée, on a $|\beta| = \frac{\|B\|_2}{\sqrt{2}}$.

B.4 Montrer que $E(B)$ existe et est une matrice de rotation. Préciser la valeur de son angle non orienté en fonction de $\|B\|_2$.

B.5 Soit $\tilde{E}$ la restriction de E à l'ensemble $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de taille 3. Montrer que $\tilde{E}$ est une surjection de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ dans $SO_3(\mathbb{R})$. Est-ce une bijection ?

III Exponentielle de matrices diagonalisables.

A. Cas de matrices diagonales.

Soit $D \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonale.

- Montrer que $E(D)$ existe et que $E(D) \in GL_p(\mathbb{K})$.
- Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(D) = E(D)$.
- Si D et D' sont des matrices diagonales, comparer $E(D + D')$ et $E(D)E(D')$.

B. Existence et propriétés de $E(A)$ lorsque A est diagonalisable.

Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.

- Montrer que $E(A)$ existe.
- Montrer que $\det(E(A)) = e^{\text{Tr}(A)}$.
- Soit $x \in \mathbb{K}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que

$$E(xI_p + A) = e^x E(A)$$

C. Exponentielle de la somme.

Soient $A, B \in M_p(\mathbb{K})$ deux matrices diagonalisables. On suppose que A et B commutent.

- Montrer qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales. On étudiera les restrictions de u_B aux sous-espaces propres de u_A .
- En déduire que $E(A + B)$ existe et que $E(A + B) = E(A)E(B) = E(B)E(A)$.

IV Exponentielle de matrices nilpotentes.

Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (on dit que A est nilpotente d'ordre k). Soit également $B \in M_p(\mathbb{C})$.

A.

A.1 Montrer que, pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq k$, $\ker(A^{j-1})$ est inclus strictement dans $\ker(A^j)$.

A.2 En déduire que $k \leq p$.

B. Montrer que $E(A)$ existe.

C. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(A) = E(A)$.

D. Soit $B \in M_p(\mathbb{C})$. On suppose que A et B commutent et que $E(B)$ existe. On pourra remarquer (et justifier) que, pour tout entier i compris entre 1 et p ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_p + \frac{1}{n} B \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_p + \frac{1}{n} B \right)^{n-i}$$

Montrer que $E(A+B)$ existe et que $E(A+B) = E(A)E(B)$.

E. Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que $E(xI_p + A) = e^x E(A)$.

F. Montrer que $E(A) - I_p$ est nilpotente.

V Cas général.

Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$P_n(X) = \left(1 + \frac{X}{n} \right)^n \in \mathbb{C}[X]$$

et χ_A le polynôme caractéristique de A défini par

$$\chi_A(X) = \det(XI_p - A)$$

A. Liens avec le polynôme caractéristique.

A.1 Montrer qu'il existe un unique couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ tel que

$$P_n = Q_n \chi_A + R_n$$

A.2 Montrer que $E(A)$ existe si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(A)$ existe.

A.3 Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les racines de χ_A deux à deux distinctes, dont on note $n_1, \dots, n_k$ les ordres de multiplicité respectifs.

Pour tout entier q compris entre 1 et p , on note J_q la matrice de $M_q(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux situés juste au-dessus de la diagonale qui valent 1.

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{C}$, pour tout entier q compris entre 1 et p , la famille $\{(xI_q + J_q)^i, 0 \leq i \leq q-1\}$ est libre. On pourra commencer par le cas $x = 0$.

A.4 Soit $B = \text{diag}(\lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1}, \dots, \lambda_k I_{n_k} + J_{n_k})$ la matrice diagonale par blocs définie par

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} + J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k I_{n_k} + J_{n_k} \end{pmatrix}$$

Montrer que $\chi_B = \chi_A$.

B. Convergence de $E(A)$.

B.1 Soit $i \geq 1$ un entier. Montrer que

$$B^i = \begin{pmatrix} (\lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1})^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\lambda_2 I_{n_2} + J_{n_2})^i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (\lambda_k I_{n_k} + J_{n_k})^i \end{pmatrix}$$

B.2 Soit P un polynôme annulateur non nul de la matrice B .

- a) Montrer que le degré de P est $\geq p$.
- b) En déduire que la famille $\{B^i, 0 \leq i \leq p-1\}$ est libre.

B.3 Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(B)$ existe.

B.4 En déduire que $E(A)$ existe.