

Graphe régulier d'excentricité constante 2

Notations

On note J_n la matrice carrée de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et K_n la matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est rapporté à la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. On rappelle que le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ est défini par la formule suivante, pour deux vecteurs $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$:

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y,$$

en notant X la matrice colonne formée par les coordonnées (x_i) et Y celle formée par les coordonnées (y_i) .

Déf - Valeur propre, espace propre

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E , et soit λ un scalaire. On dit que λ est valeur propre de u si et seulement si $\ker(u - \lambda \text{Id}) \neq \{0\}$. Dans ce cas l'espace $\ker(u - \lambda \text{Id})$ est appelé espace propre de u associé à la valeur propre λ (et les vecteurs non nuls de cet espace sont dits vecteurs propres).

A partir de I.3.4., on pourra admettre la propriété suivante qui sera bientôt vue en cours :

Propriété 1. A admettre - conséquence du théorème spectral

Si M est une matrice symétrique réelle, elle est "diagonalisable" :

- sa trace est égale à la somme des valeurs propres multipliées par les dimensions des espaces propres associés,
- elle possède une base de vecteurs propres (en regroupant les bases de chaque espace propre).

Objectifs

Calculatrices autorisées pour cette épreuve.

Le problème porte sur l'étude de matrices vérifiant une propriété (P) . Cette propriété a un sens concret en théorie des graphes. On cherche les matrices d'adjacence pour un graphe G non orienté, tel que, depuis un sommet s donné,

- il y a toujours un nombre fixe δ de voisins (le degré est constant : on parle de graphe régulier)
- tous les autres sommets étant à distance 2 (excentricité constante),
- ainsi de s on joint tout sommet avec un chemin de longueur 1 ou 2. On demande enfin que ce chemin soit unique (parmi ceux de longueur 1 ou 2).

La partie I conduit, à travers l'étude des matrices vérifiant la propriété (P) , à caractériser ces matrices.

Dans la partie II, on construit, à l'aide de produits scalaires, une matrice vérifiant la propriété (P) .

Les deux parties sont indépendantes.

Travail demandé pour mercredi 15 janvier : partie I au moins SVP.

Partie I

Dans cette partie n et δ sont des nombres entiers tels que $2 \leq \delta \leq n-1$. On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété (P) lorsqu'elle vérifie les quatre conditions suivantes :

- (1) M est symétrique ($M^\top = M$).
- (2) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $m_{i,i} = 0$.
- (3) Chaque ligne de M comporte δ coefficients égaux à 1 et $n - \delta$ coefficients égaux à 0.
- (4) Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, le coefficient $m_{i,j}$ est nul si et seulement si il existe un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $m_{i,k} = m_{j,k} = 1$. Et dans ce cas, un tel entier k est unique.

On pourra utiliser sans justification une conséquence de la propriété (P) : si $m_{i,j} = 1$ alors pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $m_{i,k}m_{j,k} = 0$.

Soit $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que la matrice M vérifie la propriété (P).

I.1. Expression de M^2 . On note $M^2 = (a_{i,j})$.

- I.1.1. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer les coefficients $a_{i,i}$.
- I.1.2. Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, déterminer le coefficient $a_{i,j}$ selon la valeur de $m_{i,j}$.
- I.1.3. Montrer que $M^2 = J_n - M + dI_n$ où d est un nombre entier que l'on déterminera.

Dans la suite, on note f (respectivement ϕ) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, de matrice M (respectivement de matrice J_n), relativement à la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

Soit v le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice colonne des coordonnées relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est K_n .

I.2. Relation entre n et δ .

- I.2.1. Déterminer $\text{Im}(\phi)$, l'image de l'application linéaire ϕ .
- I.2.2. Soit u un vecteur du noyau de $f - \delta \text{Id}$. En calculant $(f \circ \phi)(u)$, montrer que u est colinéaire à v .
- I.2.3. Montrer que δ est une valeur propre de f et déterminer le sous-espace propre correspondant.
- I.2.4. Dédire des questions précédentes l'égalité $n = \delta^2 + 1$.

I.3. Valeurs propres de f .

Dans la suite de cette question I.3, λ est une valeur propre de f avec $\lambda \neq \delta$ et $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ . On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On rappelle que, comme M est une matrice symétrique réelle, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f .

I.3.1. Montrer que les espaces propres de f associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

I.3.2. Justifier l'égalité $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Que vaut $\phi(u)$?

I.3.3. Montrer que λ est racine de l'équation (E) : $x^2 + x + 1 - \delta = 0$.

I.3.4. On note a et b les deux racines de l'équation (E). On suppose qu'une seule de ces racines est valeur propre de f , par exemple a . En utilisant la trace de l'endomorphisme f , exprimer a en fonction de δ . En déduire une impossibilité.

Les deux racines a et b de l'équation (E) sont donc des valeurs propres de f . Dans la suite, on suppose $a > b$.

I.4. Relations portant sur r, s, a, b et δ .

On note r la dimension du noyau de $f - a \text{Id}$ et s la dimension du noyau de $f - b \text{Id}$.

- I.4.1. Exprimer $(a - b)^2$ en fonction de δ .
- I.4.2. Exprimer le produit matriciel $\begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ en fonction de δ .
- I.4.3. En déduire $(r - s)(a - b)$ en fonction de δ .
- I.4.4. Pour quelle valeur de δ a-t-on $r = s$? Que valent alors r et s ?
- I.5. Premier cas. On suppose $a - b \notin \mathbb{Q}$.
- I.5.1. Montrer que $r = s$. En déduire δ et n .
- I.5.2. Déterminer a et b ; quelle est la matrice de f dans une base de vecteurs propres?
- I.6. Deuxième cas. On suppose que $a - b \in \mathbb{Q}$.
- I.6.1. On écrit $a - b = \frac{m}{q}$ avec $m, q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que tout nombre premier qui divise q divise m . En déduire que $a - b \in \mathbb{N}$.
- I.6.2. Montrer que $a - b$ est un entier impair supérieur ou égal à 3. En notant $a - b = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer δ en fonction de p . En déduire a et b en fonction de p .
- I.6.3. On note $c = a - b$. Montrer que c divise $(c^2 + 3)(c^2 - 5)$. En déduire que $c \in \{3, 5, 15\}$.
- I.6.4. Pour les différentes valeurs de c , donner le tableau des valeurs de δ, n, a, b, r et s .
- I.7. On vérifierait facilement que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$ respecte la propriété (P). Quelles sont ses valeurs propres? Dessiner le graphe correspondant à cette matrice d'adjacence.

Partie II

On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^5$ rapporté à la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$.

On note $(u|w)$ le produit scalaire de deux vecteurs u et w de $\mathbb{R}^5$.

On considère tous les vecteurs u_i obtenus en ajoutant deux vecteurs distincts de $\mathcal{B}$: $u_i = e_\alpha + e_\beta$ avec $\alpha \neq \beta$.

- II.1. Justifier que l'on définit ainsi 10 vecteurs u_i . On les indexe de façon arbitraire u_i , $i \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$.
- II.2. Calcul des produits scalaires $(u_i|u_j)$.
- II.2.1. Pour $i \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$, calculer $(u_i|u_i)$.
- II.2.2. On suppose $u_i = e_\alpha + e_\beta$ et $u_j = e_\alpha + e_\gamma$ avec $\beta \neq \gamma$. Calculer $(u_i|u_j)$.
- II.2.3. On suppose que $u_i = e_\alpha + e_\beta$ et que $u_j = e_\gamma + e_\epsilon$ avec les quatre indices $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ tous différents. Calculer $(u_i|u_j)$.
- II.3. Soit ψ un endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ qui réalise une bijection de la base $\mathcal{B}$ sur elle-même. Montrer que
- $$\forall i, j \in \llbracket 1, 10 \rrbracket, (u_i|u_j) = (\psi(u_i)|\psi(u_j))$$
- II.4. Soit $A = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = (u_i|u_j)$.
- II.4.1. Ecrire une combinaison linéaire M de A, I_n et J_n susceptible de vérifier la propriété (P) définie dans la partie I.
- II.4.2. Justifier que cette matrice M vérifie la propriété (P).
- II.4.3. Ecrire entièrement M et dessiner le graphe correspondant à cette matrice d'adjacence.