

Matrices à coefficients strictement positifs

Dans le problème, n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\llbracket 1, n \rrbracket$ désigne l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et n .

$\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes. Le module d'un nombre complexe z est noté $|z|$.

$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$) désigne l'espace des matrices à n lignes et m colonnes, à coefficients dans $\mathbb{C}$ (resp. dans $\mathbb{R}$). La matrice transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ est notée $M^\top$.

$\mathbb{C}^n$ est identifié à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ des matrices colonnes à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$. Les coefficients d'un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sont notés $x_1, \dots, x_n$. Dans tout le problème, $\mathbb{C}^n$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Pour tous $x \in \mathbb{C}^n$ et $y \in \mathbb{C}^n$, la matrice $x^\top y \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ est identifiée au nombre complexe $\sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ engendré par un vecteur $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ est noté $\mathbb{C}v$.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. strictement positive) lorsque tous ses coefficients sont des réels positifs (resp. strictement positifs). Cette propriété est notée $M \geq 0$ (resp. $M > 0$).

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, on notera $A \geq B$ (resp. $A > B$) la propriété $A - B \geq 0$ (resp. $A - B > 0$).

Attention ce n'est pas l'ordre de Löwner rencontré dans un précédent sujet ! Ainsi, pour x et y dans $\mathbb{R}^n$,

$$x \geq y \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i \geq y_i.$$

Lorsque $m = n$, on utilisera la notation $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (resp $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) pour $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ (resp $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$).

La matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

sera notée $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On note $I_n = \text{diag}(1, \dots, 1)$ la matrice identité d'ordre n .

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, **on admet** (et ce sera en fait re-justifié en passant) qu'on peut poser

$$\|M\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1}. \quad (1)$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sera en général identifiée à l'endomorphisme φ_M de $\mathbb{C}^n$ représenté par M dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$: pour $x \in \mathbb{C}^n$, $\varphi_M(x) = Mx$. On appelle spectre d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et on note $\text{Sp}(M)$, l'ensemble des valeurs propres de M . Le rayon spectral de M , noté $\rho(M)$, est défini comme le maximum des modules des valeurs propres de M :

$$\rho(M) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \text{Sp}(M)\}.$$

Les parties ne sont PAS indépendantes, mais on pourra admettre les résultats d'une question ou d'une partie qui n'a pas été traitée pour résoudre les suivantes.

Première partie

1. Déterminer le rayon spectral des matrices suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Dire, en justifiant brièvement la réponse, si les assertions suivantes sont exactes quels que soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mu \in \mathbb{C}$.

i) $\rho(\mu A) = |\mu| \rho(A)$

ii) $\rho(A^\top) = \rho(A)$.

iii) Pour $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, $\rho(P^{-1}AP) = \rho(A)$.

3. On se demande si les assertions suivantes sont vérifiées pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: pour chacune d'elles, justifier que ce n'est pas le cas.

iv) $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$.

v) $\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B)$.

4. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout nombre réel $C > 0$, montrer l'équivalence

$$\|M\| \leq C \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1.$$

5. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Deuxième partie

On répondra aux questions 6,7,8 sans chercher à donner une valeur explicite pour $\|M\|$.

6. Montrer que $\|M\|$ est aussi la borne supérieure de l'ensemble $\{\|Mx\|_1, x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_1 = 1\}$

7. Montrer que l'application $M \mapsto \|M\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

8. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{i,j}$ le coefficient de A d'indice de ligne i et d'indice de colonne j . Montrer que

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right).$$

10. On dit qu'une suite $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ lorsque

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{i,j})^{(k)} = b_{i,j}.$$

- (a) Montrer que la suite $(A^{(k)})$ converge vers B si et seulement si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^{(k)} - B\| = 0$.

- (b) Montrer que si la suite $(A^{(k)})$ converge vers B alors pour toute matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la suite $(P.A^{(k)})$ converge vers PB

- (c) Montrer que si la suite $(A^{(k)})$ converge vers B alors la suite $(\|A^{(k)}\|)$ converge vers $\|B\|$

11. On considère dans cette question une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On suppose que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| < 1.$$

Pour tout réel $b > 0$, on pose $P_b = \text{diag}(1, b, b^2, \dots, b^{n-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Calculer $P_b^{-1}AP_b$. Lorsqu'on fait tendre b vers 0, quelle est la limite de $P_b^{-1}AP_b$?

(b) En déduire qu'il existe $b > 0$ tel que

$$\|P_b^{-1}AP_b\| < 1.$$

(c) En déduire que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ des puissances de A converge vers 0.

Troisième partie

Dans les questions 12 à 14, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pourra admettre le fait suivant qui n'a pas été vu encore en cours : toute matrice carrée complexe M est semblable à une matrice triangulaire c'est-à-dire que M s'écrit $M = P^{-1}TP$ avec P inversible et T triangulaire ayant les coefficients diagonaux égaux aux valeurs propres de A (répétés selon multiplicité).

12. Montrer que si $\rho(A) < 1$, alors la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

13. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|A^k\| \geq \rho(A)^k$.

(b) On définit la partie de $\mathbb{R}_+$

$$E_A = \left\{ \alpha > 0 \mid \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{A}{\alpha} \right)^k = 0 \right\}.$$

Montrer que $E_A =]\rho(A), +\infty[$.

14. Montrer la formule

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A).$$

15. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients $a_{i,j}$, on pose $A_+ = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, où $b_{i,j} = |a_{i,j}|$. Montrer l'inégalité

$$\rho(A) \leq \rho(A_+).$$

Quatrième partie

On se propose de démontrer le résultat suivant.

Théorème 1.

Soit A une matrice **strictement positive** (c'est-à-dire à coefficients strictement positifs) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

- (i) $\rho(A) > 0$, $\rho(A)$ est une valeur propre de A et toute autre valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A vérifie $|\lambda| < \rho(A)$.
- (ii) $\rho(A)$ est une racine simple du polynôme caractéristique de A et $\ker(A - \rho(A)I_n)$ est engendré par un vecteur v_0 dont toutes les composantes sont strictement positives.
- (iii) Si v est un vecteur propre de A dont toutes les composantes sont positives, alors $v \in \ker(A - \rho(A)I_n)$.
- (iv) Pour tout vecteur positif non nul x , il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A^k x}{\rho(A)^k} = cv_0$.

Dans toute cette partie, A est donc une matrice **strictement positive** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle la propriété suivante¹ : si $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes et si

$$|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|,$$

alors le vecteur $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_n| \end{pmatrix}$.

1. Soient $x, y \in \mathbb{C}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Montrer que si $\lambda \neq \mu$, alors on a l'implication suivante

$$(Ax = \lambda x \text{ et } A^\top y = \mu y) \Rightarrow x^\top y = 0.$$

1. l'énoncé original redemandait la preuve... sauriez-vous faire ?

2. On suppose qu'il existe un réel positif μ et un vecteur positif non nul w tels que $Aw \geq \mu w$.
- (a) Montrer que pour tout entier naturel k , $A^k w \geq \mu^k w$. En déduire que $\rho(A) \geq \mu$.
- (b) Montrer que si $Aw > \mu w$, alors $\rho(A) > \mu$.
- (c) On suppose à présent que dans le système d'inégalités $Aw \geq \mu w$, la k -ième inégalité est stricte, c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j} w_j > \mu w_k.$$

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, en posant $w'_j = w_j$ si $j \neq k$ et $w'_k = w_k + \varepsilon$, on a $Aw' > \mu w'$. En déduire que $\rho(A) > \mu$.

3. Soit λ une valeur propre de A de module $\rho(A)$ et soit $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre de A associé à λ . On définit le vecteur positif non nul v_0 par $(v_0)_i = |x_i|$ pour $1 \leq i \leq n$.

- (a) Montrer que $Av_0 \geq \rho(A)v_0$, puis que

$$Av_0 = \rho(A)v_0.$$

- (b) En déduire que $\rho(A) > 0$ et

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (v_0)_i > 0.$$

- (c) Montrer que x est colinéaire à v_0 . En déduire que $\lambda = \rho(A)$.

La propriété (i) est démontrée.

4. En appliquant les résultats précédents à la matrice $A^\top$, on obtient l'existence de $w_0 \in \mathbb{R}^n$, dont toutes les composantes sont strictement positives, tel que $A^\top w_0 = \rho(A)w_0$. On pose

$$F = \{x \in \mathbb{C}^n \mid x^\top w_0 = 0\}.$$

- (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ stable par φ_A , et que

$$\mathbb{C}^n = F \oplus \mathbb{C}v_0.$$

- (b) Montrer que si v est un vecteur propre de A associé à une valeur propre $\mu \neq \rho(A)$, alors $v \in F$. En déduire la propriété (iii).

5. (a) On note ψ l'endomorphisme de F défini comme la restriction de φ_A à F . Montrer que toutes les valeurs propres de ψ sont de module strictement inférieur à $\rho(A)$. En déduire que $\rho(A)$ est une racine simple du polynôme caractéristique de A puis que

$$\ker(A - \rho(A)I_n) = \mathbb{C}v_0.$$

La propriété (ii) est démontrée.

- (b) Montrer que si $x \in F$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A^k x}{\rho(A)^k} = 0$.

- (c) Soit x un vecteur positif non-nul. Déterminer la limite de $\frac{A^k x}{\rho(A)^k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

La propriété (iv) est démontrée.