PSI* 2026/27 DL 6 correction

Solutions périodiques d'équations différentielles - Mines PC 2026

Partie 1

Q1. On commence par noter que $\mathcal{S}(H)$, espace solution de l'équation homogène (EH), est lui-même un espace vectoriel de dimension 2 par le théorème de Cauchy Lipschitz (et puisque b est une fonction continue). Par définition $\mathcal{B}(H)$ est inclus dans $\mathcal{S}(H)$. Il contient la fonction nulle. Une combinaison linéaire de solutions bornées de (EH) reste bornée.

On peut aussi dire que $\boxed{\mathcal{S}(H) \text{ est un espace vectoriel car } \mathcal{S}(H) = \mathcal{B}(H) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).}$

Q2. Si f_0 est une solution bornée de (E), les autres solutions sont les fonctions de la forme $f = f_0 + g$ où g est un élément de $\mathcal{S}(H)$. Par linéarité une telle fonction f est dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si et seulement si g est dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Quand on a une première fonction bornée } f_0 \text{ de } (E), \text{ les autres sont les } f_0 + g, g \in \mathcal{B}(H).}$

Q3. Attention on ne suppose pas f périodique. Si on pose $h = T(f)$ on a $h(x) = f(x + 2\pi)$; il s'agit d'une fonction $\mathcal{C}^2$ et pour tout réel x,

$$g''(x)b(x)g(x) = f''(x + 2\pi) + b(x)f(x + 2\pi) = f''(x + 2\pi) + b(x + 2\pi)f(x + 2\pi) = 0$$

$\boxed{\text{Si } f \in \mathcal{S}(E) \text{ alors } Tf \in \mathcal{S}(E) \text{ ; l'ensemble } \mathcal{S}(E) \text{ est stable par "translation de la variable de } 2\pi".}$

Q4. Les fonctions f et $g = T(f)$ sont toutes les deux solutions de (E). De plus $g(0) = f(2\pi) = f(0)$ et $g'(0) = f'(2\pi) = f'(0)$. Ceci montre que f et g sont solutions du même problème de Cauchy et ainsi $f = g$.

$\boxed{\text{Dès qu'une solution } f \text{ de } (E) \text{ vérifie } f(0) = f(2\pi) \text{ et } f'(0) = f'(2\pi), \text{ elle est } 2\pi\text{-périodique.}}$

Partie 2

Q5. On note que $f_0''(x) + \omega^2 f_0(x) = d(\omega^2 - 1)\cos x$. Ainsi en prenant $d = \frac{1}{\omega^2 - 1}$ qui est bien défini ($\omega \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$) on a une solution de (E) de la forme voulue.

On nous demande également des solutions de (EH) : en posant $u(x) = \cos(\omega x)$ on a bien une solution de l'équation homogène telle que $u(0) = 1, u'(0) = 0$. De même avec $v(x) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega x)$ on a une solution de l'équation homogène telle que $v(0) = 0, v'(0) = 1$.

$$\boxed{f_0(x) = \frac{1}{\omega^2 - 1}\cos x, \qquad u(x) = \cos(\omega x), \qquad v(x) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega x) \qquad \text{conviennent}}$$

Q6. Toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée, ainsi

$$\boxed{\mathcal{S}(E) = \mathcal{B}(E) = \{x \mapsto f_0(x) + au(x) + bv(x), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}}$$

Q7. Visiblement on entend par période un réel strictement positif (j'aurais mis $k \in \mathbb{Z}^*$ sinon). La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$, sa dérivée et sa dérivée seconde sont T-périodiques elles aussi, comme on le voit en dérivant $\forall x \in$

$\mathbb{R}, f(x+T)=f(x)$. Ainsi on a $f(T)=f(0)$, $f''(T)=f''(0)$ et donc en évaluant $f''(x)+\omega^2 f(x)$ en $x=0$ et en $x=T$ on a $\cos T=\cos 0=1$.

Les solutions périodiques de (E) ont une période multiple de 2π.

Q8. On écrit la relation $f(0)=f(T)$, $f'(0)=f'(T)$ pour f qui s'écrit $f=f_0+au+bv$. Cela donne un système

$$\begin{cases} a\cos(\omega T)+\frac{b}{\omega}\sin(\omega T)+d\cos T & =a+d \\ -a\omega\sin(\omega T)+b\cos(\omega T)-d\sin T & =b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(\cos(2k\pi\omega)-1)+\frac{b}{\omega}\sin(2k\pi\omega) & =0 \\ -a\omega\sin(2k\pi\omega)+b(\cos(2k\pi\omega)-1) & =0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système linéaire homogène de matrice $M=\begin{pmatrix} \cos(2k\pi\omega)-1 & \frac{1}{\omega}\sin(2k\pi\omega) \\ -\omega\sin(2k\pi\omega) & \cos(2k\pi\omega)-1 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est $d=(\cos(2k\pi\omega)-1)^2+\sin(2k\pi\omega)^2=2-2\cos(2k\pi\omega)$. Ce déterminant s'annule si et seulement si $2k\pi\omega$ est un multiple de 2π c'est-à-dire si et seulement si il existe $\ell\in\mathbb{Z}$ tel que $2k\pi\omega=2\ell\pi$, ou encore si et seulement si il existe $\ell\in\mathbb{Z}$ tel que $\omega=\frac{\ell}{k}$.

Ainsi si ω n'est pas rationnel $d\neq 0$, le système est de Cramer, il admet une unique solution, qui est $a=b=0$. Alors la seule solution périodique possible de (E) est f_0. Par ailleurs elle est bien périodique.

Si ω est irrationnel, la seule solution périodique de (E) est f_0.

Q9. Si on peut écrire $\omega=\frac{p}{q}$ avec p,q entiers strictement positifs on a $d=0$, mais cela signifie simplement qu'on peut trouver des valeurs de a et b pour lesquelles $f(0)=f(T)$, $f'(0)=f'(T)$, avec T qui n'est pas forcément 2π.

Le plus simple est de ne pas chercher à appliquer Q4 mais de travailler directement sur l'expression de f : $f(x+2q\pi)=f_0(x)+a\cos(\omega x+2p\pi)+\frac{b}{\omega}\sin(\omega x+2p\pi)=f(x)$.

Ainsi toute solution f de E est périodique et $2q\pi$ est une période de f, mais est-ce la meilleure ? Déjà on peut simplifier la fraction. On écrit $\omega=\frac{p'}{q'}$ fraction irréductible (c'est-à-dire avec p' et q' premiers entre eux) et $2q'\pi$ est aussi une période de f.

Plus généralement, si on veut trouver une période commune à toutes les solutions, il faut avoir $\cos(\omega x+\omega T)=\cos(\omega x)$ pour tout x, ce qui entraîne comme on l'a vu que ωT est un multiple de 2π, donc T est un multiple de $2\pi\frac{q'}{p'}$ et aussi un multiple de 2π : c'est un réel de la forme $T=2\pi\frac{\ell.q'}{p'}$ avec $\frac{\ell.q'}{p'}$ entier, donc ℓ multiple de p'.

Finalement, si ω rationnel et s'écrit comme $\frac{p'}{q'}$ fraction réduite, toutes les solutions sont $2q'\pi$-périodiques.

Partie 3

Q11. Si g est solution, $h=g^2$ (comprendre : le produit) est de classe $\mathcal{C}^2$ avec

$$h'(x)=2g(x)g'(x), \qquad h''(x)=2g(x)g''(x)+g'(x)^2=2g(x)^2(1+\cos x)+g'(x)^2$$

donc $h''(x)$ est positif pour tout x : la fonction $h=g^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Q12. Prouvons le petit lemme demandé. Soit h une fonction convexe sur $\mathbb{R}$, non constante.

Démo dans le cas $\mathcal{C}^2$, voire $\mathcal{C}^1$: la fonction h' n'est pas la fonction nulle, donc il existe t_0 telle que $h'(t_0)\neq 0$. Alors pour tout réel t, par convexité, h est au-dessus de sa tangente en t_0 : $h(t)\geq h(t_0)+(t-t_0)h'(t_0)$. Si $h'(t_0)>0$, ce minorant tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Si $h'(t_0)<0$, ce minorant tend vers $+\infty$ quand t tend vers $-\infty$. Dans tous les cas, h est non bornée.

Démo sans utiliser l'hypothèse $\mathcal{C}^1$, juste la convexité : comme h est non constante, il existe $t_1<t_2$ tels que $h(t_1)\neq h(t_2)$. On a deux points du graphe de h joints par une droite de pente p_0 non nulle. Or le lemme des trois pentes, ou la propriété de croissance des pentes, donnent pour $t<t_1$, $\frac{f(t)-f(t_1)}{t-t_1}\leq p_0$ et pour $t>t_2$, $\frac{f(t)-f(t_2)}{t-t_2}\geq p_0$. Si p_0 est strictement positif on prend cette dernière propriété : $f(t)\geq p_0(t-t_2)+f(t_2)$ donc a une limite $+\infty$ en $+\infty$. Si p_0 est strictement négatif c'est l'autre inégalité qu'on emploie $f(t)\leq p_0(t-t_1)+f(t_1)$ qui tend vers $-\infty$ si t tend vers $-\infty$.

Finalement le lemme est prouvé d'une façon ou d'une autre. Alors g^2 est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$, bornée, donc constante. Et la seule constante solution de (EH) est la fonction nulle.

La seule solution bornée de (EH) est la fonction nulle.

Q13. Par Q2, on peut alors dire que $\boxed{\text{si } (E) \text{ possède une solution bornée, celle-ci est unique.}}$

Q14. Soit f une solution bornée de (E). Les fonctions coefficients de (E) sont périodiques. Par Q3, $T(f)$ est solution bornée elle aussi. Mais alors par le résultat d'unicité qu'on vient d'établir, $T(f) = f$.

$\boxed{\text{Une solution de } (E) \text{ est bornée ssi elle est } 2\pi \text{ périodique. Une solution de ce type, si elle existe, est unique.}}$

Partie 4

Q15. Comme on sait que la suite est bornée par M, pour $n \geq 2$,

$$|a_n| \leq \frac{1}{2(n^2+1)}(|a_{n+1}| + |a_{n-1}|) \leq \frac{M}{n^2+1}$$

donc la série de terme général a_n est absolument convergente par comparaison de séries à termes positifs.

Mais ensuite, en réinjectant la majoration améliorée qu'on a obtenu :

$$|a_n| \leq \frac{1}{2(n^2+1)}(|a_{n+1}| + |a_{n-1}|) \leq \frac{1}{2(n^2+1)}\left(\frac{M}{n^2+1} + \frac{M}{n^2-1}\right) \leq \frac{M}{(n^2+1)(n^2-1)}$$

Donc $n^2|a_n| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et cela fait à nouveau un terme de série absolument convergente.

$\boxed{\text{Les séries } \sum a_n \text{ et } \sum n^2 a_n \text{ convergent absolument.}}$

Q16. *Version sans théorème de dérivation des séries*

La série de terme général $u_n(x) = a_n \sin(nx)$ vérifie $u_n'(x) = na_n\cos(nx)$, $u_n''(x) = -n^2 a_n \sin(nx)$, donc $\|u_n\|_\infty = |a_n|, \|u_n'\|_\infty = n|a_n| \|u_n''\|_\infty = n^2|a_n|$ sont des termes de série convergente. Ainsi $\sum u_n, \sum u_n', \sum u_n''$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

Cela montre que les séries de fonctions $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx)$, $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n\cos(nx)$, $h(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n \sin(nx)$, existent. Et cela permet de calculer la primitive terme à terme en intégrant sur $[0, X]$: k admet pour primitive h (plus constante mais on peut changer la constante) qui admet pour primitive g. Ou encore : g est $\mathcal{C}^2$ et $g''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n \sin(nx)$.

Version avec théorème de dérivation des séries

On dit de même que $\sum u_n, \sum u_n', \sum u_n''$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$, et on applique le théorème : g est $\mathcal{C}^2$ et $g''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n \sin(nx)$.

Conclusion

$$\begin{aligned}
g''(x) - (1+\cos x)g(x) &= -\sum_{n=1}^{+\infty}(n^2+1)a_n\sin(nx) - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos x \sin(nx) \\
&= -2a_1 \sin x + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}(a_{n+1}+a_{n-1})\sin(nx) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)) \\
&= -2a_1 \sin x + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}(a_{n+1}+a_{n-1})\sin(nx) - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1}\sin(nx) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}\sin(nx) \\
&(-2a_1 - \frac{1}{2}a_2)\sin x = \sin x
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est une solution périodique de } y'' - (1+\cos x)y = \sin x.}$

Q17. Le calcul proposé donne $\int_0^{2\pi} s_n(t)s_m(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos((n-m)t) - \cos((n+m)t)) = 0$. La famille $(s_1, \ldots, s_N)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls de $\mathcal{P}_N$ elle est donc libre. Comme elle est génératrice par définition, c'est une base.

$\boxed{\text{La famille } (s_1, \ldots, s_N) \text{ est une base orthogonale de } \mathcal{P}_N.}$

Q18. On a en fait déjà fait ce calcul en passant en Q16

$$\boxed{L(s_n) = (n^2+1)s_n - \frac{1}{2}s_{n+1} - \frac{1}{2}s_{n-1}}$$

Q19. On remarque que la situation est très comparable au cas des polynômes avec un endomorphisme qui semble "monter le degré de 1". Ici ce qui joue le rôle du degré c'est la composante de rang la plus élevée sur la famille des s_k.

On reprend la notation de l'énoncé $p = \sum_{k=1}^{N} \beta_k s_k$. Alors en écrivant $L(p) = 0$, on obtient un système échelonné : en regardant la composante sur s_{N+1} puis $s_N, \dots, s_2$ cela donne successivement $\beta_N = 0, \dots, \beta_1 = 0$. Ainsi L est injectif.

En revanche quand on cherche p tel que $L(p) = s_1$, comme $N \geq 1$ on a une composante $\frac{1}{2}\beta_N s_{N+1}$ qui ne peut pas être nulle, avec $N + 1 > 2$. Donc $L(p)$ ne peut pas être égal à s_1.

L'endomorphisme L a un noyau nul, mais s_1 n'est pas dans l'image : injectif non surjectif.

Q20. On a $L(\mathcal{P}_N) = \text{Vect}(L(s_1), \dots, L(s_N) \subset \mathcal{P}_{N+1}$. Par injectivité, on peut dire que L réalise un isomorphisme de $\mathcal{P}_N$ sur l'espace $L(\mathcal{P}_N)$. C'est donc un espace de dimension N.

On a aussi $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_{N+1}$, et là c'est un espace de dimension 1. Enfin comme s_1 n'est pas dans l'image de L, $L(\mathcal{P}_N) \cap \mathcal{P}_1 = \{0\}$. Ces deux espaces sont donc en somme directe et la dimension de la somme est $N+1$. Ils sont donc supplémentaires dans $\mathcal{P}_{N+1}$.

$$\boxed{\mathcal{P}_{N+1} = \mathcal{P}_1 \oplus L(\mathcal{P}_N)}$$

Q21. *L'idée est la suivante. Tout marcherait bien si on avait un antécédent pour s_1. Or ce n'est pas le cas. Mais en question 16 on a en fait trouvé un pseudo-antécédent de s_1 : la fonction g, simplement elle n'est pas dans $\mathcal{P}$. On va conclure par superposition.*

Comme $c \in \mathcal{P}$ il existe un entier N tel que $c \in \mathcal{P}_{N+1}$. On peut donc le décomposer selon Q20 en $c = \alpha s_1 + L(p)$. Alors $p + \alpha g$ est une solution périodique de l'équation (E).

Si c est un polynôme trigonométrique, (E) admet une solution périodique, et une seule.

Partie 5

Q22. Bien sûr $\mathcal{A}$ est inclus dans $\mathcal{S}(E)$. Mais attention $\mathcal{S}(E)$ lui-même n'est pas un espace vectoriel, c'est un plan affine $f_0 + \text{Vect}(u, v)$ en notant u, v deux solutions non proportionnelles de (EH). Ceci dit il est inclus dans $\mathcal{H} = \text{Vect}(f_0, u, v)$ espace vectoriel de dimension ≤ 3. On reconnaît la définition de $\mathcal{A}$: c'est la boule fermée centrée en la fonction nulle et de rayon M_0 (pour la norme $\| \ \|$).

La partie $\mathcal{A}$ est fermée, bornée, non vide dans un espace vectoriel de dimension finie.

Q23. On peut donc appliquer le théorème des bornes atteintes à la fonction $\phi : f \mapsto |f(2\pi) - f(0)| + |f'(2\pi) - f'(0)|$ sur $\mathcal{A}$.

Cela demande de préciser deux choses

- l'application ϕ est bien définie, non pas sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mais du moins sur $\mathcal{H}$ qui ne contient que des fonctions $\mathcal{C}^2$,
- l'application ϕ est continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}$: en effet les applications d'évaluation $f \mapsto f(0)$ et $f \mapsto f(2\pi)$ sont linéaires, la dérivation aussi est linéaire, tout cela en dimension finie donc elles sont continues, et enfin la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.

Il existe $f_1 \in \mathcal{A}$ pour laquelle la quantité $|f(2\pi) - f(0)| + |f'(2\pi) - f'(0)|$ atteint son minimum α.

Q24. Assurons-nous d'abord cette fonction g_n est bien un élément de $\mathcal{A}$:

- tous les $T^k(f_0)$ sont des solutions de (E)
- cette moyenne (et pas juste une combinaison linéaire) de solutions de (E) est encore une solution de E, puisque par superposition on a $g_n''(x) - (1 + \cos x) g_n(x) = \frac{1}{n+1}(n+1)c(x) = c(x)$
- on a aussi $\|g_n\| \leq \frac{n+1}{n+1} M_0$

Remarque : en fait la raison profonde c'est qu'un espace affine comme $\mathcal{S}(E)$ est convexe et de même une boule fermée est convexe.

On calcule alors $g_n(2\pi) - g_n(0) = \frac{1}{n+1}(f_0(x + 2(n+1)\pi) - f_0(x))$, d'où la majoration $|g_n(2\pi) - g_n(0)| \leq \frac{M_0}{n+1}$. De même $|g_n'(2\pi) - g_n'(0)| \leq \frac{M_1}{n+1}$ Et ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha \leq \frac{2(M_0 + M_1)}{n+1}}$$

Q25. L'inégalité précédente est vraie pour tout entier n, donc le réel positif α est en fait nul. Mais alors on est dans la situation de la question 4. : la solution f_1 est périodique.

S'il existe une solution bornée et à dérivée bornée sur $\mathbb{R}$, alors il existe une solution périodique.