

# Suites et séries de fonctions - Résumé

## 1. SUITES DE FONCTIONS

### 1.1. Convergence simple.

**Définition 1.** Soit  $I$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$ . Une suite de fonctions  $f_n: I \rightarrow \mathbb{K}$  converge simplement si, pour tout  $x \in I$ , la suite  $(f_n(x))_n$  converge. Si la convergence a lieu sur un sous-intervalle  $J \subset I$ , on dit que  $(f_n)_n$  converge simplement sur  $J$ . Si  $(f_n)_n$  converge simplement et que l'on pose  $f(x) = \lim f_n(x)$ , on dit que  $(f_n)_n$  converge simplement vers  $f$ .

La convergence simple est appelée aussi *convergence ponctuelle* : c'est en effet une convergence en tout point.

### 1.2. Convergence uniforme.

**Définition 2.** Soit  $I$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$ . Une suite de fonctions  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformément vers  $f$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$ . On définit de même la convergence uniforme sur  $J \subset I$ .

#### Premières propriétés.

- S'il y a convergence simple (resp. uniforme) de  $(f_n)_n$  sur  $I$ , alors il y a convergence simple (resp. uniforme) de  $(f_n)_n$  sur tout  $J \subset I$ .
- S'il y a convergence simple (resp. uniforme) de  $(f_n)_n$  sur  $J$  et sur  $K$ , alors il y a convergence simple (resp. uniforme) de  $(f_n)_n$  sur  $J \cup K$ . Cette propriété s'étend à une réunion quelconque pour la convergence simple et seulement à une réunion *finie* pour la convergence uniforme.
- La convergence uniforme de  $(f_n)_n$  vers  $f$  entraîne la convergence simple de  $(f_n)_n$  vers cette même fonction  $f$ .
- La limite simple (et donc uniforme) d'une suite de fonctions est unique.
- La convergence simple et la convergence uniforme sont équivalentes sur les parties *finies* de  $\mathbb{R}$  et uniquement sur elles.
- Si  $(f_n)_n$  converge simplement sur un intervalle  $I = [a, b]$  et uniformément sur  $\mathring{I} = ]a, b[$ , alors  $(f_n)_n$  converge uniformément sur  $I$ .
- Reformulation topologique de la CVU : si les fonctions  $f_n$  appartiennent à un espace sur lequel est définie une norme infinie (typiquement l'espace des fonctions bornées sur un intervalle), alors  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  si, et seulement si,  $\lim \|f_n - f\|_\infty = 0$ .
- Si  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$ , alors, à partir d'un certain rang,  $f_n - f$  est bornée (il faut bien que  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$  soit fini à.p.c.r. si l'on veut qu'elle soit de limite nulle). Cette remarque évidente est utile dans certains exercices (ex : la limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  d'une suite de polynômes est un polynôme).

Il est fréquent que l'on doive considérer une version affaiblie de la convergence uniforme, la *convergence uniforme sur tout segment*. À ce titre, on utilise souvent, pour une fonction  $f$  définie sur  $I \supset J$ , la notation  $\|f\|_{J, \infty}$  pour  $\|f|_J\|_\infty$ . Attention, la convergence simple sur un intervalle  $I$  est équivalente à la convergence simple sur tout segment inclus dans  $I$ , mais ce n'est pas vrai pour la convergence uniforme. Cela vient de ce que la convergence simple est une *propriété ponctuelle* alors que la convergence uniforme est une *propriété globale*.

- Sur  $\mathbb{R}$ , pour une convergence sur « tout segment », il suffit de traiter les segments du type  $[-a, a]$ , avec  $a \in \mathbb{R}_+^*$  ;
- sur  $\mathbb{R}_+$ , il suffit de traiter les segments du type  $[0, a]$ , avec  $a \in \mathbb{R}_+^*$  ;
- sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on doit traiter tous les segments  $[a, b]$ , avec  $0 < a < b$ . Notons toutefois qu'il est fréquent que la convergence souhaitée ait lieu en fait sur  $[a, +\infty[$  pour tout  $a > 0$  (difficulté uniquement localisée en 0) ou sur  $[0, a]$  pour tout  $a > 0$  (difficulté uniquement localisée en l'infini).

On peut comparer les définitions des convergences simple et uniforme :

$$\begin{aligned} (f_n)_n \text{ CVS } f &\iff \forall \mathbf{x} \in \mathbf{I}, \forall \varepsilon > 0, \exists \mathbf{n}_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \\ (f_n)_n \text{ CVU } f &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \mathbf{n}_0 \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{I}, \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Le passage de la convergence simple à la convergence uniforme se traduit par une interversion de quantificateurs. Pour la convergence simple, l'entier  $n_0$  peut dépendre de  $x$  alors que pour la convergence uniforme,  $n_0$  doit être le même pour tout  $x$ . Le *domaine de convergence simple* de la suite  $(f_n)_n$  est l'ensemble des  $x \in I$  tels que la suite  $(f_n(x))_n$  converge. Il n'existe pas de domaine de notion de domaine de convergence uniforme.

### 1.3. Propriétés de stabilité.

**Proposition 1.** 1. Les propriétés suivantes sont stables par passage à la limite simple (ce qui signifie que si les fonctions  $f_n$  la possèdent, leur limite simple la possède aussi) : parité, périodicité, positivité et monotonie larges.  
 2. Outre les propriétés précédentes, les propriétés suivantes sont stables par passage à la limite uniforme : continuité en un point, continuité globale, caractère borné. Plus précisément, si  $(f_n)_n$  est une suite de fonctions bornées qui converge uniformément vers  $f$ , alors la fonction  $f$  est bornée et  $\|f\|_\infty = \lim \|f_n\|_\infty$ .

Les propriétés stables par passage à la limite simple sont les propriétés ponctuelles stables par passage à la limite sur les suites, donc celles utilisant essentiellement des égalités ou des inégalités larges. Ainsi, on peut généraliser la stabilité de la positivité en disant que le fait de prendre ses valeurs dans un intervalle fermé est stable par passage à la limite simple, mais pas celui de prendre ses valeurs dans un intervalle ouvert. De même, la monotonie stricte n'est pas stable par passage à la limite simple, ni même uniforme, d'ailleurs : prendre  $f_n(x) = n^{-1} \arctan x$ , fonction strictement croissante et tendant uniformément vers la fonction nulle.

Le fait que la continuité soit une propriété locale fait qu'elle est stable par passage à la limite uniforme sur tout segment. Cela n'est pas vrai du caractère borné : prendre  $f_n(x) = \min(n, x)$  sur  $\mathbb{R}_+$ , qui définit une suite convergeant uniformément sur tout segment vers l'identité, laquelle n'est pas bornée sur  $\mathbb{R}_+$  bien que  $\|f_n\|_\infty = n < \infty$ .

La continuité par morceaux et la dérivabilité ne sont pas stables par passage à la convergence, même uniforme.

**Exemple 1.** La série de fonctions  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}$  est uniformément convergente<sup>1</sup>, sa limite n'est pas continue par morceaux (l'ensemble de ses points de discontinuité est borné et infini), mais ses sommes partielles sont des fonctions en escalier, donc continues par morceaux.

La suite de fonctions  $(f_n)_n$  définie par  $f_n(x) = \frac{1}{2n}(1 + n^2 x^2) \mathbb{1}_{[-1/n, 1/n]}(x) + |x| \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus [-1/n, 1/n]}(x)$  est dérivable en tout point et converge uniformément vers la valeur absolue, qui n'est pas dérivable en 0.

**1.4. Techniques.** — La convergence simple est une convergence de suites réelles ; pas de techniques particulières autres que celles pratiquées sur les suites (monotonie, croissances comparées, équivalents, développements limités, majorations, gendarmes...)

— Pour montrer la convergence uniforme, on cherche une majoration de  $|f_n(x) - f(x)|$  indépendante de  $x$ , dite *uniforme*, en d'autres termes, un majoration de  $\|f - f_n\|_\infty$ . Si l'on n'a pas plus simple sous la main, on peut essayer d'étudier la fonction  $f_n - f$  et de calculer explicitement  $\|f_n - f\|_\infty$ . La fonction  $f$  est donnée par le problème ou par l'étude antérieure de la convergence simple.

— Pour mettre en défaut la convergence uniforme, on peut utiliser la technique précédente, ou exhiber une suite  $(x_n)_n$  telle que  $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$  ne tend pas vers 0, ce qui revient à minorer  $\|f - f_n\|_\infty$  par une quantité ne tendant pas vers 0. On peut aussi utiliser les propriétés de stabilité, le cas le plus fréquent étant une suite de fonctions continues convergent simplement vers une fonction qui ne l'est pas, la convergence ne pouvant de ce fait être uniforme. Exemple :  $f_n(x) = \frac{nx}{1 + |nx|}$ , suite de fonctions continues qui converge simplement vers la fonction

$\text{sgn}$  sur  $\mathbb{R}$ , laquelle n'est pas continue en 0. On peut aussi considérer  $x_n = \frac{1}{n}$  et calculer  $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$ .

## 2. SÉRIES DE FONCTIONS

**2.1. Définitions.** Beaucoup d'énoncés sur les suites de fonctions concernent en fait des séries de fonctions. Les définitions sont évidentes :

**Définition 3.** Pour des fonctions  $u_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ , on dit que la série  $\sum u_n$  converge simplement (resp. uniformément) si la suite de ses sommes partielles converge simplement (resp. uniformément).

Il est utile de noter que si  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ , l'existence de  $R_n$  est équivalente à la convergence simple de  $\sum u_n$  et que la convergence uniforme de  $\sum u_n$  est alors équivalente à la convergence uniforme de  $(R_n)_n$  vers 0 :

$$\sum u_n \text{ CVU} \iff \sum u_n \text{ CVS} \ \& \ (R_n)_n \text{ CVU } 0 \iff \sum u_n \text{ CVS} \ \& \ \lim \|R_n\|_\infty = 0.$$

1. La définition de la convergence des séries de fonctions est donnée dans la section 2.

**2.2. Convergence normale.** Dans la mesure où l'étude de la série  $\sum u_n$  revient à celle de la suite de ses sommes partielles et que, réciproquement, la convergence d'une suite  $(u_n)_n$  revient à celle de la série télescopique associée  $\sum (u_{n+1} - u_n)$ , il n'y a pas grand chose de spécifique à dire sur les séries. On introduit toutefois un nouveau mode de convergence, très utile en pratique :

**Définition 4.** Pour  $u_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  des fonctions bornées pour  $n \geq n_0$ , la série de fonctions  $\sum u_n$  converge normalement si la série numérique  $\sum_{n \geq n_0} \|u_n\|_\infty$  est convergente.

**Proposition 2.** On a les implications suivantes :

- $\sum u_n$  converge normalement  $\implies \sum u_n$  converge uniformément  $\implies \sum u_n$  converge simplement.
- $\sum u_n$  converge normalement  $\implies \sum u_n(x)$  converge absolument pour tout  $x \implies \sum u_n$  converge simplement.
- Si  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge normalement, alors  $(u_n)_n$  converge uniformément.

— Comme dans le cas des séries numériques, le mode de convergence (simple, uniforme, uniforme sur tout segment, normale) d'une série de fonctions ne dépend pas de ses premiers termes.

— Sous l'hypothèse de convergence normale, on a l'extension de l'inégalité triangulaire :  $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_\infty$ .

— Utilisation du critère spécial des séries alternées : soient  $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}_+$  et la somme  $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ . On suppose que la suite de fonctions  $(u_n)_n$  est décroissante, i.e.  $(u_n(x))_n$  est décroissante pour tout  $x \in I$ . Pour que la série converge uniformément, il suffit que  $\lim \|u_n\|_\infty = 0$ . Voir l'exemple 2.

Les propriétés de stabilité vérifiées par les suites de fonctions le sont évidemment pour les séries (qui ne sont que des suites de fonctions vues différemment). En particulier, toute série simplement convergente de fonctions (dé)croissantes est (dé)croissante, une série simplement convergente de fonctions positives est positive, une série uniformément convergente de fonctions continues est continue, etc. Notons que l'étude du domaine de convergence simple de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  se fait sur  $\bigcap_{n \geq 0} \mathcal{D}_{u_n}$ . Pour étudier la convergence normale, il suffit que les fonctions  $u_n$  soient bornées à partir d'un certain rang  $n_0$ .

### 3. THÉORÈMES

Il y a trois grands théorèmes, qui expriment tous une interversion de limite. Leurs hypothèses sont toujours des conditions suffisantes, jamais nécessaires.

#### 3.1. Limite aux bornes.

**Théorème 1** (Théorème de la double limite). Soient  $\sum u_n$  une série de fonctions convergeant uniformément sur un intervalle ouvert  $I$ ,  $S$  sa somme et  $a$  une borne de  $I$ , finie ou infinie. Supposons que  $\ell_n = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} u_n(x)$  existe pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et soit finie. Alors,  $S$  admet une limite finie quand  $x$  tend vers  $a$  et cette limite est la limite des sommes partielles de la série de terme général  $\ell_n$  (qui converge donc), soit

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N u_n(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \sum_{n=0}^N u_n(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n.$$

Les hypothèses du théorème disent que les limites intérieures existent et que la convergence est uniforme sur  $I$ . Sa conclusion affirme l'existence et l'égalité des deux limites extérieures, d'où la convergence uniforme sur  $I \cup \{a\}$  si  $a$  est finie. Le théorème de la double limite est pratique pour calculer des limites (on s'en serait douté) et aussi pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme.

### 3.2. Intégration.

**Théorème 2** (Intégration). **1.a.** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur un segment borné  $[a, b]$ . Alors  $f$  est continue et

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx.$$

**1.b.** Soit  $\sum u_n$  une série de fonctions continues convergeant uniformément sur un segment  $[a, b]$ . Alors, la somme de la série est continue et

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x) \, dx.$$

**2.a.** Soient  $I$  un intervalle borné,  $(f_n)_n$  une suite de fonctions continues par morceaux, intégrables sur  $I$  convergeant uniformément vers une fonction  $f$ . Si  $f$  est continue par morceaux, alors  $f$  est intégrable sur  $I$  et

$$\int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) \, dx.$$

**2.b.** Soient  $I$  un intervalle borné et  $\sum u_n$  une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur  $I$ , convergeant uniformément sur  $I$ . Alors, si  $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$  est continue par morceaux, elle est intégrable sur  $I$  et l'on a

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n(x) \, dx.$$

Ce théorème ne s'étend ni à la convergence simple, ni à l'intégration sur un intervalle quelconque. On en verra une extension avec le théorème de convergence dominée sous une hypothèse plus faible que la convergence uniforme.

### 3.3. Dérivation.

**Théorème 3** (Dérivation). **1.** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . On suppose que

- i)  $(f_n)_n$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$  ;
- ii)  $(f'_n)_n$  converge uniformément vers  $g$  sur  $I$ .

Alors,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,  $f' = g$  et  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment inclus dans  $I$ .

**2.** Soit  $\sum u_n$  une série de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . On suppose que

- i)  $\sum u_n$  converge simplement sur  $I$  ;
- ii)  $\sum u'_n$  converge uniformément sur  $I$ .

Alors,  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,  $\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n$  et  $\sum u_n$  converge uniformément sur tout segment inclus dans  $I$ .

Il n'y a aucune raison en général pour que la convergence uniforme de la suite des fonctions entraîne celle de la suite des dérivées. Considérer par exemple  $f_n(x) = n^{-1/2} \sin(nx)$ .

Dans le théorème, on peut remplacer la convergence simple de  $(f_n)_n$  par la convergence ponctuelle en un seul point  $x_0$  (c'est ce qui ressort de la démonstration), qui s'appuie toute entière sur l'égalité

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) \, dt$$

et qui, outre le fait d'être exigible, est en soi un bon exercice. Mais ce qui est très important et d'un usage constant, c'est que si l'hypothèse de convergence uniforme est globale, la conclusion (la limite est dérivable et sa dérivée est la limite des dérivées) est de nature locale. Autrement dit, il suffit d'appliquer le théorème sur tout segment inclus dans  $I$  pour obtenir le résultat sur  $I$  tout entier, ce qui revient à ne faire l'hypothèse de la convergence uniforme des dérivées que sur tout segment. Ce théorème s'étend aux dérivées d'ordre supérieur :

**Théorème 4. 1.** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $I$ . On suppose que

- i)  $(f_n^{(k)})_n$  converge simplement vers  $g_k$  sur  $I$  pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$  ;
- ii)  $(f_n^{(p)})_n$  converge uniformément vers  $g_p$  sur  $I$ .

Alors,  $f = g_0$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $I$ ,  $f^{(k)} = g_k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$  et  $(f_n^{(k)})_n$  converge uniformément vers  $f^{(k)}$  sur tout segment inclus dans  $I$ .

2. Soit  $\sum u_n$  une série de fonctions de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $I$ . On suppose que

- i)  $\sum u_n^{(k)}$  converge simplement sur  $I$  pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$  ;
- ii)  $\sum u_n^{(p)}$  converge uniformément sur  $I$ .

Alors,  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $I$ ,  $\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$  et  $\sum u_n^{(k)}$  converge uniformément sur tout segment inclus dans  $I$  pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ .

Ce théorème se démontre par récurrence sur  $p$  en utilisant le théorème 3 pour  $f^{(p-1)}$ , puis l'hypothèse de récurrence.

On peut enfin étendre le théorème 4 au caractère  $\mathcal{C}^\infty$ , l'hypothèse étant alors qu'il existe un entier  $k_0$  tel que  $(f_n^{(k)})_n$  (resp. la série  $\sum u_n^{(k)}$ ) converge simplement sur  $I$  pour tout  $k < k_0$  et uniformément pour tout  $k \geq k_0$  sur tout segment. En fait, il suffit d'avoir convergence simple pour tout  $k$  et uniforme pour une infinité de valeurs de  $k$ , mais cette dernière version n'est guère utilisable en pratique.

#### 4. EXEMPLES D'ÉTUDE DE SÉRIES DE FONCTIONS

**Exemple 2.** Soit la série entière  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ , de rayon de convergence 1.

— *Convergence simple.* Il y a convergence simple sur  $] -1, 1[$ . En effet, il y a convergence absolue pour tout  $x \in ] -1, 1[$  par comparaison avec la série géométrique de raison  $x$ , convergence pour  $x = 1$  en vertu du critère spécial des séries alternées et divergence pour  $x = -1$  (série harmonique).

— *Convergence normale.* Posons  $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ . Pour  $[a, b] \subset ] -1, 1[$ , on a  $\|f_n|_{[a,b]}\|_\infty = \frac{\max(|a|, |b|)^n}{n}$  (on n'utilise pour cela que le fait que  $x \rightarrow |x|^n$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ ). Il y a donc convergence normale sur tout segment  $[a, b] \subset ] -1, 1[$  (ce que l'on sait aussi d'après les propriétés générales des séries entières), mais pas sur  $] -1, 1[$ .

— *Convergence uniforme.* Il y a convergence uniforme sur tout intervalle  $[a, 1]$  avec  $-1 < a < 1$  : comme la convergence normale entraîne la convergence uniforme, il suffit de montrer la convergence uniforme sur  $[0, 1]$ . Or, le critère spécial des séries alternées permet de majorer le reste  $|R_n(x)|$  par le premier terme, soit  $\frac{x^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ .

Il y a donc convergence uniforme du reste de la série vers 0, donc convergence uniforme de la série vers  $\ln(1+x)$  sur  $[a, 1]$ . En particulier, cela permet de prouver que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ . En effet,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \ln(1+x)$  pour tout  $x \in ] -1, 1[$ , mais tant la somme de la série que  $\ln(1+x)$  sont continues en 1, ce qui étend l'égalité au point 1.

Il reste à prouver que la série ne converge pas uniformément sur  $] -1, 0]$ . En posant  $y = -x$ , cela revient à prouver que  $\sum \frac{x^n}{n}$  ne converge pas uniformément sur  $[0, 1]$ . Or, en considérant les normes infinies sur  $[0, 1]$ ,

$$R_{2n}(x) - R_n(x) = \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x^k}{k} \quad \therefore \quad \|R_{2n} - R_n\|_\infty = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

ce qui contredit  $\lim \|R_n\|_\infty = 0$ . On peut aussi appliquer le théorème de la double limite en  $-1$ .

**Exemple 3.** Soit  $a \in ]0, 1[$ . On veut montrer l'existence et calculer  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cos(nx)}{n}$ . Pour  $u_n(x) = \frac{a^n \cos(nx)}{n}$ , on a  $\|u_n\|_\infty = \frac{a^n}{n} = o(a^n)$ , d'où la convergence normale de la série sur  $\mathbb{R}$  par comparaison avec la série géométrique de raison  $a$ .

Le calcul est plus délicat. Il repose sur l'idée que, si l'on ne sait pas calculer directement  $S(x)$ , la dériver terme à terme ferait disparaître le  $n$  au dénominateur, ce qui, en passant en complexes, permettrait de se ramener à une série géométrique. On commence donc par appliquer le théorème 3 (théorème de dérivation). De  $u'_n(x) = -a^n \sin(nx)$ , on déduit  $\|u'_n\|_\infty = a^n$ , d'où la convergence normale (donc uniforme) de  $\sum u'_n$ , ce qui permet d'appliquer le théorème.

Ainsi,  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $S'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin(nx)$ . Or,  $-\sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{inx} = -\frac{1}{1 - ae^{ix}} + 1$ , d'où

$$S'(x) = \operatorname{Im} \left( \frac{1}{ae^{ix} - 1} + 1 \right) = \operatorname{Im} \left( \frac{ae^{-ix} - 1}{|ae^{-ix} - 1|^2} \right) = -\frac{a \sin(x)}{(a \cos(x) - 1)^2 + (-a \sin(x))^2} = -\frac{a \sin(x)}{1 + a^2 - 2a \cos(x)} \quad \therefore$$

$$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t) dt = -\ln(1 - a) - \left[ \frac{1}{2} \ln(a^2 + 1 - 2a \cos t) \right]_0^x = -\frac{1}{2} \ln(a^2 + 1 - 2a \cos x).$$

**Exemple 4.** On définit  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1 + nx^2)}$ .

— *Domaine de définition de  $f$ .* Posons  $u_n(x) = \frac{x}{n(1 + nx^2)}$ . Si  $x \neq 0$ ,  $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x}$ , donc  $\sum u_n(x)$  converge par comparaison avec la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$ . Si  $x = 0$ , on a  $u_n(0) = 0$ , donc la série converge trivialement. Finalement,  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ . Notons que  $f$  est impaire et qu'on peut donc se contenter de l'étudier sur  $\mathbb{R}_+$ . En passant, l'équivalent suggère que l'on va avoir des difficultés à analyser ce qui se passe au voisinage de 0...

— *Continuité de  $f$  sur son domaine de définition.* Étudier la continuité, c'est essayer de montrer qu'il y a convergence uniforme. Si ce n'est pas le cas, on essaye de se débrouiller autrement. Une majoration immédiate pour  $0 < a \leq x \leq b < +\infty$  donne

$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{b}{n(1 + na^2)} \leq \frac{b}{a^2 n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ce qui montre la convergence normale sur tout segment  $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ , donc la convergence uniforme sur tout segment. La fonction  $f$  est donc continue sur tout  $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ , donc sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On peut traiter le cas de 0 à part (mais c'est un peu acrobatique) en écrivant, pour  $x > 0$ , le découpage étant choisi pour que, dans la deuxième somme,  $nx^2 \geq \sqrt{n}$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\lfloor 1/x^4 \rfloor} \frac{x}{n(1 + nx^2)} + \sum_{n=\lfloor 1/x^4 \rfloor + 1}^{\infty} \frac{x}{n(1 + nx^2)} \leq \sum_{n=1}^{\lfloor 1/x^4 \rfloor} \frac{x}{n} + \sum_{n=\lfloor 1/x^4 \rfloor + 1}^{\infty} \frac{x}{n(1 + \sqrt{n})} \\ &\leq x \left( 1 + \int_1^{1/x^4} \frac{dt}{t} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n\sqrt{n}} = -4x \ln x + \mathcal{O}(x) \xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que  $f$  est continue en 0. Mais, et c'est plus simple ici, on peut aussi mieux majorer  $|u_n(x)|$  en calculant explicitement sa norme infinie. C'est ce qui est fait ci-dessous.

De fait,  $u'_n(x) = \frac{1 - nx^2}{n(1 + nx^2)^2}$ . Comme  $u_n(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$ , le tableau de variations donne un maximum en  $1/\sqrt{n}$ , soit  $\|u_n\|_{\infty} = u_n(1/\sqrt{n}) = n^{-3/2}/2$ . Il y a donc convergence normale sur  $\mathbb{R}_+$  (en fait, sur  $\mathbb{R}$  par imparité) donc  $f$  est continue.

— *Limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers l'infini.* La convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$  permet d'utiliser le théorème de la double limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1 + nx^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{n(1 + nx^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

— *Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et montrer que sa courbe représentative admet une demi-tangente à l'origine.* Si  $0 < a \leq x \leq b < +\infty$ , on majore

$$|u'_n(x)| = \frac{|1 - nx^2|}{n(1 + nx^2)^2} \leq \frac{1 + b^2 n}{n(1 + na^2)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b^2}{a^4 n^2}.$$

La série  $\sum u'_n(x)$  converge ainsi normalement, donc uniformément, sur tout segment  $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ , ce qui entraîne que  $f$  est dérivable sur ces segments et, donc, sur  $\mathbb{R}^*$ . Pour étudier la dérivée en 0, on revient à sa définition comme limite du taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + nx^2)} \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(1 + nx^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

Par ailleurs, la fonction  $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  comme série de fonctions décroissantes, donc elle admet une limite en 0. La minoration précédente montre que cette limite est au moins égale aux sommes partielles

de la série harmonique, qui diverge, donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ , ce qui démontre l'existence d'une demi-tangente verticale à l'origine.

— *Équivalent de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers l'infini.* L'idée, plutôt simple, est d'appliquer à nouveau le théorème de la double limite, mais en multipliant cette fois  $f(x)$  par une fonction  $\lambda(x)$  assurant une limite non nulle  $\ell$ , ce qui donne l'équivalent  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{\lambda(x)}$ . Ici, on prend  $\lambda(x) = x$ , soit  $xf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n(1+nx^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x^2)$  avec

$v_n(t) = \frac{t}{n(1+nt)}$  (il y a des  $x^2$  partout, autant en profiter pour simplifier l'expression de  $v_n$ , que l'on va dériver).

On calcule  $v'_n(t) = \frac{1}{n(1+nt)} > 0$ . La fonction  $v_n$  est croissante et l'on a donc  $\|v_n\|_{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} v_n(t) = \frac{1}{n^2}$ . Ainsi, la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n(1+nx^2)}$  converge normalement, donc uniformément et le théorème de la double limite donne :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{n(1+nx^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \therefore \quad f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}.$$

— *Équivalent de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 0.* Au voisinage de 0, la technique ci-dessus n'est pas opérante, mais l'on peut utiliser à la place une comparaison série-intégrale. Soit  $a > 0$ . La fonction  $h_a : t \mapsto \frac{1}{t(1+at)}$  est clairement

décroissante, positive, de limite nulle et l'on a  $f(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} h_{x^2}(n)$ .

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} h_a(t) dt &\leq h_a(n) \leq \int_{n-1}^n h_a(t) dt \quad \therefore \quad \int_1^{\infty} h_a(t) dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} h_a(n) \leq h_a(1) + \int_1^{\infty} h_a(t) dt \\ \int_1^{+\infty} h_a(t) dt &= \int_1^{+\infty} \left[ \frac{1}{t} - \frac{a}{1+at} \right] dt = \left[ \ln \left( \frac{t}{1+at} \right) \right]_1^{t \rightarrow +\infty} = \ln \left( \frac{1}{a} \right) - \ln \left( \frac{1}{1+a} \right) = \ln \left( \frac{1+a}{a} \right) \\ -2x \ln |x| &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln \left( \frac{1+x^2}{x^2} \right) \leq f(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} h_{x^2}(n) \leq \frac{x}{1+x^2} + x \ln \left( \frac{1+x^2}{x^2} \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2x \ln |x| \end{aligned}$$

On conclut par le théorème des gendarmes :  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2x \ln |x|$ .

## 5. COMPLÉMENT : THÉORÈME DE LA DOUBLE LIMITE, COMPARAISON SUITES-SÉRIES

**5.1. Démonstration du théorème 1.** La démonstration est hors programme, mais accessible à partir des connaissances de PSI, quoique difficile (niveau X-ENS).

On se place sous les hypothèses du théorème : soient  $\sum u_n$  une série de fonctions convergeant uniformément sur un intervalle ouvert  $I$ ,  $S$  sa somme et  $a$  une borne de  $I$ , finie ou infinie. Supposons que  $\ell_n = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} u_n(x)$  existe pour tout  $n$  et

est finie. Pour  $N \in \mathbb{N}$ , on note  $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ ,  $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$  et  $R_N = S - S_N$ . La partie la plus difficile consiste à montrer la convergence de la série  $\sum \ell_n$ .

**Étape 1.** Montrons que  $\forall \varepsilon > 0, \exists p_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 : m > n \geq p_0(\varepsilon) \implies |\ell_{n+1} + \ell_{n+2} + \dots + \ell_m| \leq \varepsilon$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par définition de la convergence uniforme, il existe  $p_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $N \geq p_0(\varepsilon)$ ,  $\|R_N\|_{I, \infty} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Alors, l'inégalité triangulaire donne

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 : m > n \geq p_0(\varepsilon) \implies \|S_m - S_n\|_{I, \infty} = \|R_n - R_m\|_{I, \infty} \leq \|R_n\|_{I, \infty} + \|R_m\|_{I, \infty} \leq \varepsilon,$$

avec  $S_m - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_m$ . Alors, pour tout  $x \in I$  et tout  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  avec  $m > n > p_0(\varepsilon)$ ,

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_m(x)| = |S_m(x) - S_n(x)| \leq \|S_m - S_n\|_{I, \infty} \quad \therefore$$

$$|\ell_{n+1} + \ell_{n+2} + \dots + \ell_m| \leq \|S_m - S_n\|_{I, \infty} \leq \varepsilon.$$

en faisant tendre  $x \in I$  vers  $a$  par linéarité de la limite.

**Étape 2.** Le résultat obtenu lors de la première étape entraîne la convergence de la série de terme général  $\ell_n$ . Il s'agit du critère de Cauchy, lui aussi hors programme, que l'on montre donc ci-dessous en ayant recours à des suites extraites.

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , posons avec les notations de la première étape  $n_k = p_0(2^{-k})$ . En prenant pour  $p_0(2^{-k})$  une valeur strictement supérieure à  $n_{k-1}$  (à  $\varepsilon$  fixé, il existe une valeur minimale de  $p_0(\varepsilon)$  et l'on peut prendre n'importe quel entier supérieur ou égal à cette valeur), la suite  $(n_k)_k$  est strictement croissante. Par construction,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall m \geq n_k: |\ell_{n_k+1} + \ell_{n_k+2} + \cdots + \ell_m| \leq 2^{-k}.$$

En particulier,  $|\ell_{n_k+1} + \ell_{n_k+2} + \cdots + \ell_{n_{k+1}}| \leq 2^{-k}$ , donc la série de terme général  $\ell_k = \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \ell_i$  est absolument convergente en vertu de la question précédente et du théorème de comparaison. Elle est donc convergente, ce qui montre que la suite extraite des sommes partielles  $\left(\sum_{i=0}^{n_k} \ell_i\right)_k$  converge. Posons  $\varsigma_m = \sum_{i=0}^m \ell_i$  et  $\varsigma = \lim_{k \rightarrow \infty} \varsigma_{n_k}$ . Si  $m \geq n_k$ , il s'ensuit

$$|\varsigma - \varsigma_m| = |\varsigma - \varsigma_{n_k} + \varsigma_{n_k} - \varsigma_m| \leq |\varsigma - \varsigma_{n_k}| + |\varsigma_m - \varsigma_{n_k}| \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ , si  $k \geq k_0 = 1 + \lceil \log_2(\varepsilon) \rceil$ , on a  $|\varsigma - \varsigma_m| \leq 2^{-k+1} \leq \varepsilon$  pour tout  $m \geq n_{k_0}$ , ce qui assure que  $\lim \varsigma_m = \varsigma$ , donc que la série  $\sum \ell_i$  converge.

**Étape 3.** Il reste à prouver que  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} S(x) = \varsigma$ . En vertu de l'inégalité triangulaire, on a, pour  $x \in I$  et  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$|S(x) - \varsigma| = |S_m(x) + R_m(x) - \varsigma_m - (\varsigma - \varsigma_m)| \leq |S_m(x) - \varsigma_m| + \|R_m\|_\infty + |\varsigma - \varsigma_m|.$$

Il faut maintenant jouer avec les  $\varepsilon$ . Soit donc  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\lim \varsigma_m = \varsigma$ , il existe un entier  $n_0$  tel que  $|\varsigma_m - \varsigma| \leq \varepsilon/3$  pour tout  $m \geq n_0$ . De même, la convergence uniforme sur  $I$  assure qu'il existe un entier  $n_1$  tel que  $\|R_m\|_\infty \leq \varepsilon/3$  pour  $m \geq n_1$ . Posons  $n_2 = \max(n_0, n_1)$ . Par linéarité de la limite,  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} S_{n_2}(x) = \varsigma_{n_2}$ ; il existe donc  $\alpha > 0$  tel que, pour tout  $x \in I$ , si  $|x - a| \leq \alpha$

(on suppose ici que  $a \in \mathbb{R}$ , le cas où  $a = \pm\infty$  se traitant de manière similaire), alors  $|S_{n_2}(x) - \varsigma_{n_2}| \leq \varepsilon/3$ . Ainsi, pour ces mêmes  $x$ ,  $|S(x) - \varsigma| \leq \varepsilon$ , ce qui termine la preuve du théorème de la double limite. On notera que cette dernière étape fonctionne comme la preuve de la stabilité de la continuité par limite uniforme. Ce n'est pas étonnant car, si  $a \in \mathbb{R}$ , l'étape

2 montre que l'on peut prolonger  $S$  en  $a$  par  $S(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n$ . Alors,  $(S_n)_n$  converge uniformément vers  $S$  sur  $I$  et simplement sur  $I \cup \{a\}$ , donc uniformément sur  $I \cup \{a\}$ , d'où le théorème de la double limite, qui exprime alors la continuité de  $S$  en  $a$ .

**5.2. Comparaison suites-séries.** On rappelle que, si  $(u_n)_n$  est une suite réelle ou complexe, la convergence de la suite  $(u_n)_n$  est équivalente à celle de la série télescopique associée  $\sum (u_{n+1} - u_n)$ . Cela s'étend aux suites de fonctions.

**Proposition 3.** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$ . Alors,  $(f_n)_n$  converge simplement si, et seulement si, la série  $\sum (f_{n+1} - f_n)$  converge simplement et la convergence uniforme de la suite est équivalente à celle de la série. En particulier, si  $\sum (f_{n+1} - f_n)$  converge normalement, alors  $(f_n)_n$  converge uniformément.

*Preuve.* Pour la convergence simple, il s'agit de l'application du résultat sur les séries numériques en tout point  $x \in I$ . Sous l'hypothèse de convergence simple, la série converge uniformément si, et seulement si, la suite des restes converge uniformément vers la fonction nulle, d'où l'équivalence avec la convergence uniforme de la suite  $(f_n)_n$  en utilisant l'expression

$$\text{télescopique du reste } R_n = \sum_{k=n}^{\infty} (f_{k+1} - f_k) = -f_n. \quad \square$$

On en déduit en particulier une version du théorème de la double limite qui a disparu du programme :

**Théorème 5.** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions convergent uniformément vers  $f$  sur  $I$  et  $a \in \{\inf I, \sup I\}$  (fini ou pas). Supposons que  $\ell_n = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} f_n(x)$  existe pour tout  $n \geq n_0$  et est finie. Alors,  $f$  admet une limite quand  $x$  tend vers  $a$  et cette limite est la limite, finie, de la suite  $(\ell_n)_n$ . Autrement dit,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} f_n(x).$$