DMS 4 — PSI* — 2025-2026

L'exercice et les deux problèmes sont entièrement indépendants.

Exercice

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{(k+x)^2}$.

Q 1. Montrer que la suite $(S_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et qu'elle y définit une fonction S périodique.

Q 2. Montrer que S est continue.

Q 3. Montrer que

$$\forall x \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z} \colon S(2x) = \frac{1}{4}\left[S(x) + S\left(x + \frac{1}{2}\right)\right].$$

Q 4. Vérifier que la fonction $g(x) = \dfrac{1}{\sin^2(\pi x)}$ est solution de l'équation fonctionnelle de la question 3.

Q 5. On pose $\delta(x) = \pi^2 g(x) - S(x)$. Montrer que δ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Q 6. Montrer que δ est la fonction nulle. En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

Problème I — Matrices à coefficients dans $[0, 1]$

Dans tout ce problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et l'on note :

— $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0, 1\}$;

— $\mathcal{Y}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $[0, 1]$;

— $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0, 1\}$ et ne contenant qu'un seul coefficient non nul par ligne et par colonne. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_3, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ \mathrm{e}^{-1} & 3/4 \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_2 \quad \& \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_3.$$

I. Généralités

I.A. *Propriétés élémentaires*

Q 7. Justifier que $\mathcal{X}_n$ est un ensemble fini et déterminer son cardinal.

Q 8. Démontrer que $\forall n \geqslant 2$, $\forall M \in \mathcal{Y}_n \colon |\det(M)| < n!$.

Q 9. Démontrer que $\mathcal{Y}_n$ est une partie convexe, fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 10. Soient $M \in \mathcal{Y}_n$ et λ une valeur propre complexe de M. Démontrer que $|\lambda| \leqslant n$ et donner un exemple explicite où l'on a l'égalité.

I.B. *Étude de $\mathcal{X}'_n = \mathcal{X}_n \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*

Q 11. Dresser sans justification la liste des éléments de $\mathcal{X}_2'$. Préciser, en le justifiant succinctement, ceux qui sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

Q 12. Dans cette question, on montre que $\mathrm{Vect}(\mathcal{X}_n') = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Traiter le cas $n = 2$. Étendre le résultat à $n \geqslant 3$.

II. Deux problèmes d'optimisation

II.A. *Étude de la distance à $\mathcal{Y}_n$*

Pour tout $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on note $(M \mid N) = \mathrm{tr}(M^\top N)$.

Q 13. Expliciter $(M \mid N)$ en fonction des coefficients de M et de N. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\|M\|$ la norme euclidienne associée.

Q 14. On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{Y}_n$ telle que

$$\forall N \in \mathcal{Y}_n \colon \|A - M\| \leqslant \|A - N\|.$$

Q 15. Justifier l'unicité de la matrice M ci-dessus et expliciter ses coefficients en fonction de ceux de A.

II.B. *Maximisation du déterminant sur $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$*

Q 16. Justifier que le déterminant possède un maximum sur $\mathcal{X}_n$ (noté x_n) et un maximum sur $\mathcal{Y}_n$ (noté y_n).

Q 17. Démontrer que la suite $(y_n)_{n \geqslant 2}$ est croissante.

Q 18. Soit $J_n \in \mathcal{X}_n$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. On pose $M_n = J_n - I_n$. Calculer $\det(M_n)$; en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = +\infty$.

Q 19. Soit $N = (n_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{Y}_n$. Fixons $1 \leqslant i, j \leqslant n$ et supposons que $n_{i,j} \in]0, 1[$. Démontrer qu'en remplaçant $n_{i,j}$ soit par 0, soit par 1, on peut obtenir une matrice N' de $\mathcal{Y}_n$ telle que $\det(N) \leqslant \det(N')$. En déduire que $x_n = y_n$.

Problème II — Théorème d'approximation de Weierstraß

Ce problème étudie la possibilité pour une fonction $f \colon I \to \mathbb{R}$ d'être limite uniforme d'une suite de polynômes. Le théorème d'approximation de Weierstraß affirme que *toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur ce segment.*

La première partie traite le cas de la valeur absolue sur l'intervalle $[-1, 1]$. La deuxième montre qu'il suffit de montrer le théorème de Weierstraß sur le segment $[0, 1]$ pour des fonctions s'annulant aux bornes de l'intervalle. La troisième est dévolue à la démonstration du théorème d'approximation de Weierstraß dans une version légèrement édulcorée : *toute fonction lipschitzienne sur un segment y est limite uniforme d'une suite de polynômes.* La quatrième partie, indépendante des précédentes, montre que l'on ne peut pas passer d'un segment à $\mathbb{R}$: seules les fonctions polynomiales sont limites uniformes d'une suite de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$. On termine par une application. Dans tout le problème, on identifie librement polynômes formels et fonctions polynomiales.

I. *Approximation uniforme de la valeur absolue*

Dans cette partie, on définit récursivement la suite de polynômes $(P_n)_n$ par $P_0 = 0$ et $P_{n+1} = P_n + \dfrac{1}{2}\left(X^2 - P_n^2\right)$. On note $\mathrm{va} \colon x \longmapsto |x|$ la restriction de la fonction valeur absolue à l'intervalle $[-1, 1]$.

Q 20. Calculer P_1 et P_2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \in \mathbb{R}[X]$. Donner sa parité et son degré.

Q 21. Donner le terme de plus bas degré de P_n, la valeur du coefficient correspondant et le coefficient dominant de P_n.

Q 22. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1] \colon x - P_{n+1}(x) = \big(x - P_n(x)\big)\left[1 - \frac{1}{2}\big(x + P_n(x)\big)\right].$$

Q 23. En raisonnant par récurrence sur n, en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1] \colon 0 \leqslant P_n(x) \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant x \leqslant 1.$$

Q 24. En déduire que $(P_n)_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers va.

Q 25. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1] \colon 0 \leqslant x - P_n(x) \leqslant x\left(1 - \frac{x}{2}\right)^n.$$

Q 26. En déduire que la suite $(P_n)_n$ converge uniformément vers va sur $[0,1]$, puis sur $[-1,1]$.

Q 27. Montrer que $N_+(P) = \|P\|_{[0,1],\infty}$, norme infinie de la restriction de la fonction polynomiale P à l'intervalle $[0,1]$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Q 28. On définit de même $N_-(P) = \|P\|_{[-1,0],\infty}$ (on ne demande pas de justifier que c'est aussi une norme). Montrer que N_+ et N_- ne sont pas équivalentes.

II. *Réductions*

Q 29. Montrer que si le théorème d'approximation de Weierstraß est vrai sur $[0,1]$, alors il l'est sur tout segment $[a,b]$.

Q 30. En considérant, pour $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, l'application $g(x) = f(x) - f(0) - x\big(f(1) - f(0)\big)$, montrer que l'on peut supposer, sans perte de généralité, que la fonction f à approcher uniformément par une suite de polynômes vérifie $f(0) = f(1) = 0$.

III. *Approximation polynomiale uniforme des fonctions lipschitziennes*

Soit $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1) = 0$. On prolonge f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$. On définit une suite de polynômes Q_n et des fonctions P_n par

$$\alpha_n = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (1 - x^2)^n \,\mathrm{d}x,\quad Q_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}(1 - x^2)^n,$$

$$\forall x \in [0,1] \colon P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+y) Q_n(y) \,\mathrm{d}y.$$

Q 31. Déterminer une minoration du type $\alpha_n \geqslant \dfrac{C}{n+1}$, où C est une constante strictement positive.

Q 32. Montrer que $(Q_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle du type $[\alpha, 1]$ ou $[-1, -\alpha]$, où $0 < \alpha < 1$.

Q 33. Montrer que $P_n(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t) Q_n(t - x) \,\mathrm{d}t$. En déduire que P_n est un polynôme.

Q 34. Montrer que

$$\forall x \in [0,1] \colon \big|P_n(x) - f(x)\big| \leqslant \int_{-1}^{1} \big|f(x+y) - f(x)\big| Q_n(y) \,\mathrm{d}y.$$

Q 35. En déduire que, si f est lipschitzienne, la suite $(P_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. On pourra couper l'intégrale en trois avec la relation de Chasles et utiliser la question 32.

Q 36. Montrer que toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment est limite uniforme de polynômes.

IV. *Étude sur* $\mathbb{R}$

Soit $(P_n)_n$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

Q 37. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout couple d'entiers $(n,m) \in [\![n_0, +\infty[\![^2$, le polynôme $P_n - P_m$ soit borné.

Q 38. Montrer que $f - P_{n_0}$ est une fonction constante. En déduire que f est une fonction polynomiale.

Q 39. Montrer qu'une série entière de rayon de convergence infini converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, c'est un polynôme.

V. *Une application*

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_A(P) = \sup\limits_{a \in A} |P(a)|$.

Q 40. Quelles sont les parties A telles que N_A soit une norme ? On donnera d'abord la réponse, puis on démontrera la caractérisation énoncée.

Q 41. Si N_A est une norme et $a \in \mathbb{R}$, montrer que l'application $P \longmapsto P(a)$ est continue si, et seulement si, $a \in \overline{A}$.