DMS 4 — PSI* — 2025-2026 — Corrigé

Exercice

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{(k+x)^2}$.

Q 1. En coupant la somme en deux selon le signe de k, il vient

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+x)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x-k)^2}.$$

Par comparaison avec la série définissant $\zeta(2)$, les deux séries convergent absolument pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Ainsi $(S_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \colon S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2}.$$

Alors,

$$S(x+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+x+1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+1-k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+x)^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x-k)^2} = S(x),$$

la fonction u_0 ayant été transféré de la première série à la deuxième. Alternativement, en passant par S_n :

$$S_n(x+1) - S_n(x) = \frac{1}{(x+n+1)^2} - \frac{1}{(x-n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

soit $S(x+1) = S(x)$ en passant à la limite. Pour $k \in \mathbb{Z}$, posons dans la suite $u_k(x) = \dfrac{1}{(x+k)^2}$.

Q 2. Pour $k \notin \{-1, 0\}$, u_k est bornée sur l'intervalle $]0,1[$ et $\|u_k\|_{]0,1[,\,\infty}$ vaut $\dfrac{1}{(k+1)^2}$ si k est négatif et $\dfrac{1}{k^2}$ si k est positif. En écrivant

$$S_n = u_{-1} + u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=2}^{n} u_{-k},$$

cela entraîne la convergence normale des deux séries introduites à la question 1 sur une période de S, d'où la continuité de S, la convergence normale entraînant la convergence uniforme.

On peut éviter la mise à l'écart de deux valeurs de k en raisonnant sur $S - S_n$ pour montrer directement la convergence uniforme

$$\forall x \in]0,1[: 0 \leqslant S(x) - S_{n-1}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Q 3. Le plus simple est de travailler sur l'expression de S comme somme de deux séries

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left[S(x) + S\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2x+2k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2x-2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2x+2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2x-(2k-1))^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2x+n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2x-n)^2} = S(2x)\end{aligned}$$

en regroupant termes pairs et impairs.

Q 4. En utilisant les formules $\cos\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(t)$, $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ et $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, il vient

$$g(x) + g\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sin^2(\pi x)} + \frac{1}{\sin^2\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\sin^2(\pi x)} + \frac{1}{\cos^2(\pi x)} = \frac{1}{\sin^2(\pi x)\cos^2(\pi x)} = \frac{4}{\sin^2(2\pi x)} = g(2x),$$

ce qui montre que la fonction $g(x) = \dfrac{1}{\sin^2(\pi x)}$ est solution de l'équation fonctionnelle de la question 3.

Q 5. La fonction $\delta(x) = \pi^2 g(x) - S(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, où elle est 1-périodique et continue sur une période. On décompose

$$\delta(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} - S(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} - \frac{1}{x^2} - T(x) \qquad \text{avec} \quad T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2}.$$

$$\text{Or, } \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2 x^2 - \sin^2(\pi x)}{x^2 \sin^2(\pi x)} = \frac{\big(\pi x - \sin(\pi x)\big)\big(\pi x + \sin(\pi x)\big)}{x^2 \sin^2(\pi x)} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{(\pi^3 x^3/6)(2\pi x)}{\pi^2 x^4} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Par ailleurs, T est une somme de deux séries de fonctions normalement convergentes sur, disons, $I = \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$ car $\left\|x \mapsto (k+x)^{-2}\right\|_{I,\infty} = \left\|x \mapsto (x-k)^{-2}\right\|_{I,\infty} = \left(k - \frac{2}{3}\right)^{-2}$. Ainsi, T converge *a fortiori* uniformément sur I et y est donc continue. Il s'ensuit que δ est prolongeable en une fonction continue sur I et, par 1-périodicité, sur $\mathbb{R}$.

Q 6. D'après la question précédente, S est continue sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique. On a donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} S(x) = \sup_{x \in [0,1]} S(x)$ et cette borne supérieure est un maximum. Si ce maximum est atteint en, disons, $2x_0$, alors la relation fonctionnelle de la question 3 donne

$$\|S\|_\infty = S(2x_0) = \frac{1}{4}\left[S(x_0) + S\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)\right] \leqslant \frac{\|S\|_\infty}{2} \qquad \therefore \qquad \|S\|_\infty = 0.$$

Ainsi, δ est la fonction nulle et l'on a donc $S(x) = \dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. En substituant $x = 0$ dans l'expression de T de la question 5, il vient $T(0) = 2\zeta(2)$. Le calcul de limite fait à la question 5 donne alors $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Problème I — Centrale 2016, PSI 1

I. Généralités

I.A. *Propriétés élémentaires*

Q 7. Il y a un nombre fini de valeurs possibles pour chaque coefficient et un nombre fini de coefficients, donc $\mathcal{X}_n$ est fini. Plus précisément, il y a deux choix possibles par coefficient et n^2 coefficients, donc $\#\mathcal{X}_n = 2^{n^2}$.

Q 8. Ceux qui la connaissent peuvent partir de la définition du déterminant à partir du groupe symétrique. Pour $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{Y}_n$, l'inégalité triangulaire, le fait que la signature d'une permutation appartient à $\{-1, 1\}$ et l'encadrement $0 \leqslant m_{i,j} \leqslant 1$ donnent

$$|\det(M)| = \left|\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)}\right| \leqslant \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |\varepsilon(\sigma)| \prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)} \leqslant \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} 1 = n!$$

Pour avoir égalité, il faudrait que tous les coefficients de M prissent la valeur 1, donc que $\varepsilon(\sigma) = 1$ pour toute permutation σ, ce qui est faux pour la moitié d'entre elles. L'inégalité est donc stricte.

Les autres raisonnent par récurrence sur n. L'inégalité est claire pour $n = 2$ car

$$\left|\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = |ad - bc| \leqslant 1 < 2!.$$

Supposons-la vraie pour toute matrice de $\mathcal{Y}_{n-1}$. Soit $M \in \mathcal{Y}_n$. Le développement du déterminant par rapport à la première ligne donne alors

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1,i} \det(M_{1,i}) \quad \therefore \quad |\det(M)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} |\det(M_{1,i})| < \sum_{i=1}^{n} (n-1)! = n!,$$

ce qui termine la récurrence.

Q 9. — La convexité de l'intervalle $[0,1]$ passe à $\mathcal{Y}_n$: si $(M,N) \in \mathcal{Y}_n^2$ et $\lambda \in [0,1]$, alors le coefficient d'indices (i,j) de la matrice $\lambda M + (1-\lambda N)$ vaut $\lambda m_{i,j} + (1-\lambda)n_{i,j} \in [0,1]$.
— En munissant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme infinie, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\|M\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}|$, tout élément de $\mathcal{Y}_n$ est de norme au plus 1, donc $\mathcal{Y}_n$ est borné.
— Enfin, le caractère fermé de l'intervalle $[0,1]$ passe aussi à $\mathcal{Y}_n$: par caractérisation séquentielle, ssi $M_k = \big(m_{i,j}^{(k)}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une suite de matrices de $\mathcal{Y}_n$ de limite $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $m_{i,j} = \lim\limits_{k\to\infty} m_{i,j}^{(k)} \in [0,1]$, donc $M \in \mathcal{Y}_n$.

Alternativement, on pouvait tenter : $\mathcal{Y}_n = \overline{B}_\infty(A, 1/2)$, boule fermée de centre $A = J_n/2$, matrice dont tous les coefficients sont égaux à $1/2$, et de rayon $1/2$ relativement à la norme infinie. Or, les boules fermées sont fermées, bornées et convexes, c.q.f.d.

Q 10. Soient $M \in \mathcal{Y}_n$, λ une valeur propre complexe de M et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. On note $\|X\|_\infty$ la norme infinie de X et i_0 un indice tel que $|x_{i_0}| = \|X\|_\infty$. La ligne (coordonnée) d'indice i_0 de l'égalité $MX = \lambda X$ donne

$$|\lambda|\|X\|_\infty = |\lambda x_{i_0}| = \left|\sum_{j=1}^n m_{i_0,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^n m_{i_0,j}\|X\|_\infty \leqslant n\|X\|_\infty,$$

d'où $|\lambda| \leqslant n$ en divisant par $\|X\|_\infty > 0$.

Alternativement, toujours en partant de $AX = X$,

$$|\lambda|\,\|X\|_1 = \|MX\|_1 = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n m_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |m_{i,j}x_j| \leqslant \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |x_j| = n\,\|X\|_1\,,$$

d'où $|\lambda| \leqslant n$, puisque $\|X\|_1 \neq 0$.

Pour l'égalité, la matrice $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 vérifie $J_nU = nU$, où U est le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les coordonnées valent aussi 1, d'où $n \in \mathrm{Sp}(J_n)$. On reparlera de cette matrice à la question 18.

I.B. *Étude de* $\mathcal{X}_n' = \mathcal{X}_n \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Q 11. Il y a seize matrices dans $\mathcal{X}_n$, présentées ici par rang croissant :

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\ \underline{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}}.$$

Celles appartenant à $\mathcal{X}_2'$ sont les six dernières. Prenons-les une par une : I_2 est diagonale, donc diagonalisable. La suivante vérifie $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^2 = I_2$, c'est une matrice de symétrie et elle est donc diagonalisable. Les deux suivantes sont triangulaires, distinctes de I_2 et ont 1 pour unique valeur propre, donc elles ne sont pas diagonalisables ($\mathrm{rg}(A - I_2) = 1 < 2$). Les deux dernières sont symétriques réelles, donc diagonalisables.

Q 12. En notant $E_{i,j}$ les éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on vérifie immédiatement que

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} - I_2 = E_{1,2},\ \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} - I_2 = E_{2,1},\ \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = E_{1,1},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = E_{2,2},$$

ce qui montre que $\mathrm{Vect}(\mathcal{X}_2') = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On peut alternativement vérifier que les quatre matrices de $\mathcal{X}_2'$ avec trois 1 et un 0 forment une famille libre.

Si $n \geqslant 3$, la preuve du caractère générateur de $\mathcal{X}_2'$ s'adapte assez facilement et l'on a encore $\mathrm{Vect}(\mathcal{X}_n') = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
— si $i \neq j$, alors $E_{i,j} = (I_n + E_{i,j}) - I_n$ est la différence de deux éléments de $\mathcal{X}_n'$;
— pour $1 \leqslant i \leqslant n$, soit $j \neq i$. Alors, $E_{i,i} = \big(I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{j,j}\big) - \big(I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{j,j} - E_{i,i}\big)$; ces deux matrices étant de déterminant -1, elles appartiennent à $\mathcal{X}_n'$.

II. Deux problèmes d'optimisation

II.A. *Étude de la distance à $\mathcal{Y}_n$*

Q 13. Pour tout $(M,N)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on note $(M\,|\,N)=\operatorname{tr}\left(M^\top N\right)$. On note $\tilde{m}_{i,j}=m_{j,i}$ le coefficient générique de la matrice $M^\top$. Alors,

$$\operatorname{tr}\left(M^\top N\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{m}_{j,i}n_{i,j}=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}m_{i,j}n_{i,j}$$

est le transport sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n^2}$ par l'isomorphisme canonique, donc c'est bien un produit scalaire. Rappelons que cet isomorphisme envoie $\mathbb{R}^{n^2}\ni(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n^2}$ sur $(m_{u,v})_{1\leqslant u,v\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $m_{u,v}=a_{(u-1)n+v}$, d'inverse $a_i=m_{1+(i-1)//n,\,1+(i-1)\%n}$. On a $\|M\|=\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}m_{i,j}^2$.

Il est bien sûr aussi possible de procéder à la vérification directement en jouant sur les deux expressions. La linéarité de la trace montre que $N\longmapsto\operatorname{tr}(M^\top N)$ est linéaire et

$$(M\,|\,N)=\operatorname{tr}\left(M^\top N\right)=\operatorname{tr}\left(\left(M^\top N\right)^\top\right)=\operatorname{tr}\left(N^\top M^{\top\top}\right)=\operatorname{tr}\left(N^\top M\right)=(N\,|\,M)$$

donne la symétrie, d'où la linéarité à gauche. Le caractère défini positif est immédiat à partir de l'expression en coordonnées, $(M\,|\,M)=\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}m_{i,j}^2$ étant toujours positif et strictement positif sauf si tous les coefficients de M sont nuls.

Q 14. L'application $N\longmapsto\|A-N\|$ est continue. Elle est donc bornée et atteint ses bornes sur le fermé-borné $\mathcal{Y}_n$ (question 9) car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. En notant $M\in\mathcal{Y}_n$ un élément où elle atteint son minimum, on a alors

$$\forall N\in\mathcal{Y}_n:\ \|A-M\|\leqslant\|A-N\|\,.$$

Bien que cela ne soit demandé qu'à la question suivante, où la construction explicite de M la rend évidente, la convexité de $\mathcal{Y}_n$ donne l'unicité de M (c'est un théorème général hors programme de *projection orthogonale sur un convexe fermé*) : rappelons l'*identité du parallélogramme,* qui affirme que la somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme du carré de ses diagonales, soit $2\|x\|^2+2\|y\|^2=\|x+y\|^2+\|x-y\|^2$. Supposons que deux matrices M et M' réalisent le minimum requis. On pose $m=\|A-M\|=\|A-M'\|$. Soit $M''=\dfrac{1}{2}(M+M')$ le milieu du segment $[M,M']$. Alors, l'identité du parallélogramme appliquée à $x=A-M$ et $y=A-M'$ donne

$$4\|A-M''\|^2+\|M-M'\|^2=4m^2\qquad\therefore\qquad M=M'$$

par minimalité de m, le fait que $\mathcal{Y}_n$ soit convexe entraînant que $M''\in\mathcal{Y}_n$.

Q 15. Pour $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a $\|A-M\|^2=\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_{i,j}-m_{i,j})^2$. Minimiser cette quantité revient à minimiser chacun des carrés intervenant dans la somme (ils sont indépendants), ce qui donne l'unicité de M et sa construction : si $a_{i,j}\in[0,1]$, alors $m_{i,j}=a_{i,j}$; si $a_{i,j}<0$, alors $m_{i,j}=0$ et, si $a_{i,j}>1$, alors $m_{i,j}=1$.

II.B. *Maximisation du déterminant sur $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$*

Q 16. L'ensemble $\mathcal{X}_n$ est fini et toute partie finie de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément, d'où l'existence de $x_n=\displaystyle\max_{M\in\mathcal{X}_n}\det(M)$. L'application déterminant définit par ailleurs une application continue sur le fermé-borné $\mathcal{Y}_n$ et y atteint donc son maximum, noté y_n.

Q 17. Soit $M\in\mathcal{Y}_{n-1}$. Alors la matrice $M'=\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0\\ & M & & 0\\ & & & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$ appartient à $\mathcal{Y}_n$ et $\det(M')=\det(M)$. Il s'ensuit que $\mathcal{Y}_n$ contient une matrice de déterminant y_{n-1}, donc que $(y_n)_n$ est croissante.

Q 18. La matrice J_n, comme on l'a vu à la question 10, vérifie
$$\chi_{J_n} = X^{n-1}(X-n) \qquad \therefore \qquad \chi_M = \chi_{J_n - I_n} = (X+1)^{n-1}\big(X-(n-1)\big),$$
d'où $\det(M_n) = (-1)^{n-1}(n-1)$, d'où $y_{2n+1} \geqslant 2n$; comme $(y_n)_n$ est croissante et qu'elle admet une suite extraite de limite $+\infty$, on en déduit que $\lim y_n = +\infty$.

Q 19. En développant par rapport à la i-ème ligne, on constate que la fonction $t \longmapsto \det(N + tE_{i,j})$ est une fonction polynomiale de degré au plus 1, donc monotone. Il s'ensuit qu'en remplaçant $n_{i,j}$ soit par 0, soit par 1, on peut obtenir une matrice N' de $\mathcal{Y}_n$ telle que $\det(N) \leqslant \det(N')$.

En parcourant ainsi toute la matrice, on passe les coefficients de N à la valeur 0 ou à la valeur 1, de manière à en augmenter (au sens large) le déterminant. Si l'on procède ainsi à partir d'une matrice de $\mathcal{Y}_n$ de déterminant y_n, on va obtenir une matrice de $\mathcal{X}_n$ de déterminant au moins égal, soit $x_n \geqslant y_n$. L'autre inégalité étant évidente, du fait que $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{Y}_n$, on a donc $x_n = y_n$.

Problème II

Q 20. Soient $P_0 = 0$ et $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}\big(X^2 - P_n^2\big)$. On calcule $P_1 = \frac{1}{2}X^2$ et $P_2 = X^2 - \frac{1}{8}X^4$. Il est immédiat par récurrence sur n que P_n est un polynôme pair, comme somme de polynômes pairs.

Toujours par récurrence, on vérifie que $\deg(P_n) = 2^n$: c'est vrai si $n = 1$. Supposons que $n \geqslant 1$ et que $\deg(P_n) = 2^n$. Alors, $\deg(P_n^2) = 2\deg(P_n) = 2^{n+1}$, qui est strictement supérieur à $\deg(X^2) = 2$ et à $\deg(P_n)$ qui vaut 2^n. Ainsi, $\deg(P_{n+1}) = 2^{n+1}$.

Q 21. On vérifie par récurrence que le terme de plus bas degré de P_n vaut $\frac{n}{2}X^2$. C'est vrai si $n = 1$. Supposons que cela soit vérifié pour P_n avec $n \geqslant 1$. Alors, le terme de plus bas degré de P_n^2 est de degré 4, donc on a $P_{n+1} = \frac{n}{2}X^2 + \frac{1}{2}X^2 + Q_n$, Q_n ne comportant que des termes de degré au moins 4, soit $P_{n+1} = \frac{n+1}{2}X^2 + Q_n$ et l'hypothèse au rang $n+1$.

Le coefficient dominant est plus délicat à trouver et il est pertinent d'en détailler le calcul pour être convaincant ; notons-le a_n. La relation de récurrence sur les polynômes donne $a_{n+1} = -\frac{a_n^2}{2}$ et $a_1 = \frac{1}{2}$. En posant $a_n = -\frac{1}{2^{r_n}}$, il vient $r_{n+1} = 2r_n + 1$ et $r_1 = 1$, d'où $r_n = 2^n - 1$. Finalement, $a_n = -\frac{1}{2^{2^n - 1}}$ si $n \geqslant 2$ et $a_1 = \frac{1}{2}$.

Q 22. On utilise la relation de récurrence et la factorisation $X^2 - P_n^2 = (X - P_n)(X + P_n)$. Il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\forall x \in [0,1]$:

$$(1) \qquad x - P_{n+1}(x) = x - P_n(x) - \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x)) = \big(x - P_n(x)\big)\left(1 - \frac{1}{2}\big(x + P_n(x)\big)\right).$$

Q 23. Montrons la suite d'inégalités
$$\mathrm{HR}(n) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1] \colon 0 \leqslant P_n(x) \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant x \leqslant 1$$
par récurrence sur n. Il est plus simple et, surtout plus rapide, de ne faire qu'une seule récurrence pour toute la suite d'inégalités car celles-ci dépendent les unes des autres. Pour $n = 0$, elle se réduit à $0 \leqslant 0 \leqslant \frac{x^2}{2} \leqslant x \leqslant 1$, qui est vraie car, pour $x \in [0,1]$, $x^2/2 \leqslant x^2 \leqslant x$.

Supposons que $\mathrm{HR}(n)$ soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors,
- $0 \leqslant P_{n+1}(x)$ est contenue dans $\mathrm{HR}(n)$.
- La relation de récurrence donne $P_{n+2}(x) - P_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\big(x^2 - P_{n+1}^2(x)\big) \geqslant 0$ car $P_{n+1}(x) \leqslant x$ par HR(n).
- Enfin, $x + P_{n+1}(x) \leqslant 2x \leqslant 2$ par $\mathrm{HR}(n)$ et la relation (1) assure alors que
$$x - P_{n+2}(x) = \big(x - P_{n+1}(x)\big)\left(1 - \frac{1}{2}(x + P_n(x))\right) \geqslant 0$$

comme produit de deux réels positifs.

Q 24. À x fixé, la suite $(P_n(x))_n$ est croissante et majorée, donc convergente. Soit $f(x)$ sa limite. La majoration $P_n(x) \leqslant x$ donne en passant à la limite l'inégalité $f(x) \leqslant x$. En passant à la limite dans la relation (1) (question Q22), il vient

$$x - f(x) = (x - f(x))\left(1 - \frac{1}{2}(x + f(x))\right) \qquad \therefore \qquad \frac{1}{2}\big(x - f(x)\big)\big(x + f(x)\big) = 0,$$

d'où $f(x) = x$ par différence car tout le monde est positif d'après la question Q23.

Q 25. La relation (1) et $P_n(x) \geqslant 0$ donnent, par une récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1]\colon 0 \leqslant x - P_n(x) \leqslant \left(1 - \frac{x}{2}\right)(x - P_{n-1}(x)) \leqslant \big(x - P_0(x)\big)\left(1 - \frac{x}{2}\right)^n = x\left(1 - \frac{x}{2}\right)^n.$$

Q 26. Posons $\Delta(x) = x\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^n$ pour $x \in [0,1]$. Un calcul simple montre que

$$\Delta'(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{n+1}{2}x\right) \quad \therefore \quad \|\Delta\|_\infty = \Delta\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{\mathrm{e}\,n},$$

donc $(P_n)_n$ converge uniformément vers va sur $[0,1]$. L'extension à $[-1,1]$ est immédiate car tant va que P_n sont des fonctions paires (pour P_n, on l'a montré à la question Q20).

Q 27. C'est manifestement une question de cours. Il n'est donc pas question de la bâcler.
— $N_+(P)$ est bien définie par le théorème des bornescar P est une fonction polynomiale, donc continue sur le segment $[0,1]$;
— Il est clair que $N_+(P) \geqslant 0$. Si $N_+(P) = 0$, alors $P(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$, donc P admet une infinité de racines, donc P est le polynôme nul ;
— Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $N_+(\lambda P) = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |\lambda P(x)| = |\lambda| \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |P(x)| = |\lambda| N_+(P)$;
— Si P et Q sont des polynômes, pour tout $x \in [0,1]$, $|P(x) + Q(x)| \leqslant |P(x)| + |Q(x)| \leqslant N_+(P) + N_+(Q)$, d'où $N_+(P+Q) \leqslant N_+(P) + N_+(Q)$ en passant à la borne supérieure.
On a montré que N_+ définit bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Q 28. D'après la question 26, la suite $(P_n)_n$ converge vers X au sens de N_+ et vers $-X$ au sens de N_-, donc les normes N_+ et N_- ne sont pas équivalentes, puisqu'elles ne définissent pas la même notion de limite. Il est aussi possible de construire un contrexemple *ad hoc*. Par exemple, $N_+\big((X+1)^n\big) = 2^n$ et $N_-\big((X+1)^n\big) = 1$, donc le quotient N_+/N_- n'est pas borné, ce qui assure que les deux normes ne sont pas équivalentes.

II. *Réductions*

Q29. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle. Alors, l'application φ définie sur $[0,1]$ par $\varphi(t) = (1-t)a + tb$ réalise une bijection strictement croissante de $[0,1]$ sur $[a,b]$ de bijection réciproque $\psi(u) = \dfrac{u-a}{b-a}$ (vérification immédiate — noter que l'application φ est celle utilisée pour les questions de convexité).

Soit $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Posons $f = g \circ \varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Par hypothèse, il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Alors, pour tout $u \in [a,b]$:

$$Q_n(u) = P_n(\psi(u)) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\psi(u)) = g(u)$$

et $\|Q_n - g\|_\infty = \|P_n - f\|_\infty$, ce qui montre la convergence uniforme de $(Q_n)_n$ vers g. Comme ψ est une fonction affine, il est clair que Q_n est un polynôme. On a ainsi étendu le théorème d'approximation de Weierstraß du segment $[0,1]$ à un segment $[a,b]$ quelconque.

Q 30. Pour $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, soit l'application $g(x) = f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0))$. Alors, $g(0) = g(1) = 0$. Supposons que g soit la limite uniforme d'une suite $(Q_n)_n$ de polynômes. Alors,

$$g(x) - Q_n(x) = f(x) - \big[Q_n(x) + f(0) + x(f(1) - f(0))\big] = f(x) - P_n(x).$$

Alors, $P_n = Q_n + f(0) + (f(1) - f(0))X \in \mathbb{R}[X]$ et $\|P_n - f\|_\infty = \|Q_n - g\|_\infty$.

III. *Approximation polynomiale uniforme des fonctions lipschitziennes*

Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1) = 0$. On prolonge f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$. On définit une suite de polynômes Q_n et des fonctions P_n par

$$\alpha_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x, \quad Q_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}(1-x^2)^n,$$
$$\forall x \in [0,1]\colon P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+y) Q_n(y) \,\mathrm{d}y.$$

Q 31. De $1 - x^2 \geqslant 1 - x \geqslant 0$ et de la croissance de $t \to t^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on tire

$$\alpha_n = 2\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^1 (1-x)^n \,\mathrm{d}x \overset{(u=1-x)}{=} 2\int_0^1 u^n \,\mathrm{d}u = \frac{2}{n+1} \quad \text{ou, alternativement,}$$
$$\alpha_n = 2\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 2x(1-x^2)^n \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Q 32. Si $0 < \alpha < 1$ et $x \in [-1, -\alpha] \cup [\alpha, 1]$, la majoration de la question 31 et les croissances comparées donnent

$$0 \leqslant Q_n(x) \leqslant \frac{(1-\alpha^2)^n}{\alpha_n} \leqslant (n+1)(1-\alpha^2)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Q 33. L'énoncé invite implicitement à effectuer le changement de variable $t = x + y$ dans l'intégrale. On utilise ensuite le fait que f est nulle en dehors de l'intervalle $[0,1]$ et les inégalités $x - 1 \leqslant 0 < 1 \leqslant x + 1$.

$$\forall x \in [0,1]\colon P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+y) Q_n(y) \,\mathrm{d}y = \int_{x-1}^{x+1} f(t) Q_n(t-x) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t) Q_n(t-x) \,\mathrm{d}t.$$

En utilisant la définition de Q_n et la formule du binôme de Newton, on peut écrire

$$Q_n(t-x) = \frac{1}{\alpha_n}\big[1 - (t-x)^2\big]^n = \sum_{k=0}^{2n} A_{k,n}(t) x^k \quad \text{avec } A_{k,n}(t) \in \mathbb{R}[t].$$

Il est inutile d'écrire la formule explicite en regroupant les puissances de x. En intégrant par rapport à t, il vient

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} b_k x^k \quad \text{avec} \quad b_k = \int_0^1 f(t) A_{k,n}(t) \,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}.$$

Q 34. Par définition de α_n, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_n(y) \,\mathrm{d}y = 1$. On calcule alors, en tenant compte de ce que $Q_n(y) \geqslant 0$,

$$P_n(x) - f(x) = \int_{-1}^{1} f(x+y) Q_n(y) \,\mathrm{d}y - f(x)\int_{-1}^{1} Q_n(y) \,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \big(f(x+y) - f(x)\big) Q_n(y) \,\mathrm{d}y$$
$$\therefore \quad \big|P_n(x) - f(x)\big| \leqslant \int_{-1}^{1} |f(x+y) - f(x)| Q_n(y) \,\mathrm{d}y.$$

Q 35. On suppose que f est k-lipschitzienne. Soient $\varepsilon > 0$ et $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2k}$. Alors, en utilisant que $Q_n(y) \geqslant 0$ pour $-1 \leqslant y \leqslant 1$ et que $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_n(y) \,\mathrm{d}y = 1$, il vient

$$\begin{aligned}
\big|P_n(x) - f(x)\big| &\leqslant \int_{-1}^{-\delta} |f(x+y) - f(x)| Q_n(y) \,\mathrm{d}y + \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+y) - f(x)| Q_n(y) \,\mathrm{d}y + \int_{\delta}^{1} |f(x+y) - f(x)| Q_n(y) \,\mathrm{d}y \\
&\leqslant 2\,\|f\|_\infty \left(\int_{-1}^{-\delta} Q_n(y) \,\mathrm{d}y + \int_{\delta}^{1} Q_n(y) \,\mathrm{d}y\right) + \int_{-\delta}^{\delta} k|y|\, Q_n(y) \,\mathrm{d}y \\
&\leqslant 2\,\|f\|_\infty \left(\int_{-1}^{-\delta} Q_n(y) \,\mathrm{d}y + \int_{\delta}^{1} Q_n(y) \,\mathrm{d}y\right) + k\delta \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(y) \,\mathrm{d}y \\
&\leqslant 2\,\|f\|_\infty \left(\int_{-1}^{-\delta} Q_n(y) \,\mathrm{d}y + \int_{\delta}^{1} Q_n(y) \,\mathrm{d}y\right) + k\delta \int_{-1}^{1} Q_n(y) \,\mathrm{d}y \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

si n est suffisamment grand d'après la question 32.

Q 36. L'approximation uniforme s'étend par la question 35 aux fonctions lipschitziennes sur un segment. Pour pouvoir appliquer la question précédente, il suffit de montrer que toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment est lipschitzienne, ce qui vient de l'inégalité des accroissements finis : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$, sa dérivée est continue, donc bornée sur ce segment et f est $\left\|f'\right\|_\infty$ −lipschitzienne.

IV. *Étude sur* $\mathbb{R}$

Soit $(P_n)_n$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

Q 37. Par définition de la convergence uniforme, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|f(x)-P_n(x)\right| = 0$. En particulier, cette borne supérieure est finie à partir d'un certain rang n_0. Alors, pour n et m au moins égaux à n_0, l'inégalité triangulaire donne

$$\left|P_n(x) - P_m(x)\right| \leqslant \left|P_n(x) - f(x)\right| + \left|f(x) - P_m(x)\right| < +\infty.$$

Ainsi, $P_n - P_m$ est une fonction polynomiale bornée

Q 38. Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme de degré $d \geqslant 1$. Alors, $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_d x^d \xrightarrow[x\to+\infty]{} \operatorname{sgn}(a_d)\infty$. En particulier, la fonction polynomiale P n'est pas bornée. Par contraposée, $P_n - P_m$ est constant pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\min(n,m) \geqslant n_0$ et, en particulier, $P_n - P_{n_0}$ l'est pour tout $n \geqslant n_0$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$, il existe $c_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_n - P_{n_0} = c_n$. En passant à la limite simple, il vient $f(x) - P_{n_0}(x) = c = \lim c_n$, l'existence de c venant de l'existence de la limite dans le terme de gauche. Ainsi, f est une fonction polynomiale.

Q 39. Soit une série entière $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence infini. Que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$ signifie que la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_n$ définie par $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ converge uniformément. Elle est donc constante à partir d'un certain rang n_0, soit $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a_n x^n = 0$. Par unicité du DSE, cela entraîne $a_n = 0$ pour tout $n > n_0$. Ainsi, S est polynomiale.

V. *Un exercice d'application*

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_A(P) = \sup\limits_{a\in A} |P(a)|$.

Q 40. Montrons que N_A définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$ si, et seulement si, A est une partie bornée infinie de $\mathbb{R}$.

Si A est finie, alors $N_A(P)$ est bien définie. Si A est infinie, alors $N_A(P)$ est définie comme la borne supérieure d'un ensemble infini et n'est plus automatiquement finie. Or, un polynôme non constant a des limites infinies en l'infini, donc $N_A(P) \in \mathbb{R}$, si, et seulement si A est bornée.

Il est patent que N_A est positive, vérifie l'inégalité triangulaire et la propriété $N_A(\lambda P) = |\lambda| N_A(P)$ quelle que soit A (c'est la même démonstration qu'à la question 27 pour N_+). Le seul point en suspens est donc la caractérisation du polynôme nul. Or, $\sup\limits_{a\in A} |P(a)| = 0$ équivaut à $P(a) = 0$ pour tout $a \in A$. Ce qui caractérise le polynôme nul si, et seulement si, A est infinie.

Q 41. On suppose que A est une partie infinie bornée de $\mathbb{R}$ et l'on note que, pour $a \in \mathbb{R}$, l'application $P \longmapsto P(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$. Elle est donc continue si, et seulement s'il existe une constante c telle que $|P(a)| \leqslant c N_A(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

— Si $a \in A$, alors $|P(a)| \leqslant \sup\limits_{b\in A} |P(b)| = N_A(P)$. L'application $P \longmapsto P(a)$ est donc continue.

— Par ailleurs, $A \subset \overline{A}$ assure que $\sup\limits_{a \in A} |P(a)| \leqslant \sup\limits_{a \in \overline{A}} |P(a)|$. Or, si $\overline{A} \ni a = \lim a_n$ avec $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, alors, par continuité de P, $P(a) = \lim P(a_n)$, donc $|P(a)| \leqslant N_A(P)$, soit $N_A = N_{\overline{A}}$ et $P \longmapsto P(a)$ est continue.

— Supposons maintenant que $a \notin \overline{A}$. Alors, $\overline{A}^c$ est ouvert, donc il existe $\eta > 0$ tel que $[a - \eta, a + \eta] \cap A = \varnothing$ et il existe une fonction lipschitzienne valant 1 en a et dont la restriction à $\overline{A}$ est nulle (affine par morceaux par exemple). En vertu du théorème d'approximation de Weierstraß, elle est limite uniforme d'une suite de polynômes P_n. On a ainsi $P_n(a) = 1$ pour tout n et $\lim N_A(P_n) = 0$, donc $P \longmapsto P(a)$ n'est pas continue en a.

On a bien montré que l'application $P \longmapsto P(a)$ est continue si, et seulement si, $a \in \overline{A}$.