

On désigne par  $C([0, 1])$  l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur  $[0, 1]$ . Pour tout  $\lambda \geq 0$ , on note  $\phi_\lambda$  l'élément de  $C([0, 1])$  défini par  $\phi_\lambda(x) = x^\lambda$ . Par convention, on a posé  $0^0 = 1$  de sorte que  $\phi_0$  est la fonction constante 1.

Soit  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de réels  $\geq 0$  deux à deux distincts. On note  $W$  le sous-espace vectoriel de  $C([0, 1])$  engendré par la famille  $(\phi_{\lambda_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Le but du problème est d'établir des critères de densité de l'espace  $W$  dans  $C([0, 1])$  pour l'une ou l'autre des deux normes classiques  $N_\infty$  ou  $N_2$  définies par :

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \left( \int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

*La question préliminaire et les parties A, B, C et D sont indépendantes les unes des autres.*

### Question préliminaire

- 1) Montrer que  $(\phi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$  est une famille libre de  $C([0, 1])$ .

### A. Déterminants de Cauchy

On considère un entier  $n > 0$  et deux suites réelles finies  $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$  et  $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$  telles que  $a_k + b_k \neq 0$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Pour tout entier  $m$  tel que  $0 < m \leq n$ , le *déterminant de Cauchy* d'ordre  $m$  est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_m} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_m+b_1} & \frac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}.$$

On définit la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (X - a_k)}{\prod_{k=1}^n (X + b_k)}.$$

- 2) Montrer que si  $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$  est injective, alors  $R(X)$  est de la forme  $R(X) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{X+b_k}$  avec  $A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$ . On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de  $D_n$  en remplaçant la dernière colonne de la matrice par  $(R(a_1) \ R(a_2) \ \cdots \ R(a_n))^T$ .

- 3) En déduire que

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j)}.$$

### B. Distance d'un point à une partie d'un espace normé

Soit  $E$  un espace vectoriel normé par une norme  $\|\cdot\|$ . On rappelle que la distance d'un élément  $x \in E$  à une partie non vide  $A$  de  $E$  est le réel noté  $d(x, A)$  défini par :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

- 4) Montrer que  $d(x, A) = 0$  si et seulement si  $x$  est adhérent à  $A$ .  
5) Montrer que si  $(A_n)_{n \geq 0}$  est une suite croissante de parties de  $E$  et si  $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$  alors  $d(x, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n)$ .

Pour  $x \in E$ , on note  $B_x = \{y \in E; \|y - x\| \leq \|x\|\}$ . On considère un sous-espace vectoriel  $V$  de dimension finie de  $E$ . Les parties de  $V$  fermées et bornées sont dites *compactes*.

- 6) Montrer que  $B_x \cap V$  est compacte et que  $d(x, V) = d(x, B_x \cap V)$  pour tout  $x \in E$ .  
7) En déduire que pour tout  $x \in E$ , il existe un élément  $y \in V$  tel que  $d(x, V) = \|x - y\|$ .

### C. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace euclidien

Dans cette partie, on suppose que la norme sur l'espace vectoriel  $E$  est définie à partir d'un produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$  sur  $E$  :  $\|x\| = \sqrt{(x | x)}$ .

- 8) Montrer que si  $V$  est un sous-espace vectoriel *de dimension finie* de  $E$ , alors pour tout  $x \in E$ , la projection orthogonale de  $x$  sur  $V$  est l'unique élément  $y \in V$  vérifiant  $d(x, V) = \|x - y\|$ .

Pour toute suite finie  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ , on désigne par  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  le déterminant de la *matrice de Gram* d'ordre  $n$  définie par :

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} (x_1 | x_1) & (x_1 | x_2) & \cdots & (x_1 | x_n) \\ (x_2 | x_1) & (x_2 | x_2) & \cdots & (x_2 | x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n | x_1) & (x_n | x_2) & \cdots & (x_n | x_n) \end{pmatrix}.$$

- 9) Montrer que  $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  si et seulement si la famille  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est liée.
- 10) On suppose que la famille  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est libre et l'on désigne par  $V$  l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrer que, pour tout  $x \in E$ ,

$$d(x, V)^2 = \frac{G(x_1, x_2, \dots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

#### D. Comparaison des normes $N_\infty$ et $N_2$

Pour toute partie  $A$  de  $C([0, 1])$ , on note  $\overline{A}^\infty$  et  $\overline{A}^2$  les adhérences de  $A$  pour les normes  $N_\infty$  et  $N_2$  respectivement. Pour  $f \in C([0, 1])$ , la notation  $d(f, A)$  désigne toujours la distance de  $f$  à  $A$  *relativement à la norme  $N_2$*  (on ne considérera jamais, dans l'énoncé, la distance d'un élément à une partie relativement à la norme  $N_\infty$ ).

**On admet le théorème d'approximation de Weierstraß : l'espace vectoriel des fonctions polynomiales est dense dans  $C([0, 1])$  pour  $N_\infty$ .**

- 11) Montrer que pour tout  $f \in C([0, 1])$ ,  $N_2(f) \leq N_\infty(f)$ . En déduire que pour toute partie  $A$  de  $C([0, 1])$ , on a  $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$ .
- On considère l'ensemble  $V_0 = \{f \in C([0, 1]); f(0) = 0\}$ , et l'on rappelle que  $\phi_0$  désigne la fonction constante 1.

- 12) Montrer que  $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$ .
- 13) En déduire que  $V_0$  est dense dans  $C([0, 1])$  pour la norme  $N_2$ , mais n'est *pas* dense pour la norme  $N_\infty$ .
- 14) Montrer que si  $V$  est un s.e.v. d'un e.v.n, alors son adhérence  $\overline{V}$  est également un espace vectoriel.
- 15) Montrer qu'un s.e.v.  $V$  de  $C([0, 1])$  est dense pour la norme  $N_\infty$  si, et seulement si,  $\phi_m \in \overline{V}^\infty$  pour tout entier  $m \geq 0$ .
- 16) En déduire qu'un s.e.v.  $V$  de  $C([0, 1])$  est dense pour la norme  $N_2$  si, et seulement si,  $\phi_m \in \overline{V}^2$  pour tout entier  $m \geq 0$ .

#### E. Un critère de densité de $W$ pour la norme $N_2$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $W_n$  l'espace vectoriel engendré par la famille finie  $(\phi_{\lambda_k})_{0 \leq k \leq n}$ .

- 17) Montrer que l'espace  $W$  est dense dans  $C([0, 1])$  pour la norme  $N_2$  si et seulement si  $\lim_n d(\phi_\mu, W_n) = 0$  pour tout entier  $\mu \geq 0$ .
- 18) Montrer que

$$\forall \mu \geq 0: d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{k=0}^n \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}.$$

- 19) Montrer que la suite  $\left( \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \right)_{k \in \mathbb{N}}$  tend vers 1 pour tout  $\mu \geq 0$  si, et seulement si, la suite  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ .

On pourra pour cela étudier les variations de la fonction  $x \in [0, \mu] \mapsto \frac{\mu - x}{x + \mu + 1}$ .

- 20) En déduire que l'espace  $W$  est dense dans  $C([0, 1])$  pour la norme  $N_2$  si et seulement si la série  $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$  est divergente (s'il existe  $k$  tel que  $\lambda_k = 0$ , on l'exclue de la somme).

#### F. Un critère de densité de $W$ pour la norme $N_\infty$

- 21) Montrer que si  $W$  est dense dans  $C([0, 1])$  pour la norme  $N_\infty$ , alors la série  $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$  est divergente.
- 22) Soit  $\psi = \sum_{k=0}^n a_k \phi_{\lambda_k} \in W_n$ . Montrer que si  $\lambda_k \geq 1$  pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , alors pour tout  $\mu \geq 1$  :

$$N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leq N_2 \left( \mu \phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^n a_k \lambda_k \phi_{\lambda_k-1} \right).$$

**23)** On suppose que la suite  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vérifie les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (i) & \lambda_0 = 0 \\ (ii) & \lambda_k \geq 1 \text{ pour tout } k \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que, sous ces conditions, si la série  $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$  est divergente, alors  $W$  est dense dans  $C([0, 1])$  pour  $N_\infty$ .

**24)** Montrer que la conclusion précédente est encore valable si l'on remplace la condition  $(ii)$  par la condition plus faible  $(ii') : \inf_{k \geq 1} \lambda_k > 0$ .