

On désigne par $C([0, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$. Pour tout $\lambda \geq 0$, on note ϕ_λ l'élément de $C([0, 1])$ défini par $\phi_\lambda(x) = x^\lambda$. Par convention, on a posé $0^0 = 1$ de sorte que ϕ_0 est la fonction constante 1.

Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels ≥ 0 deux à deux distincts. On note W le sous- espace vectoriel de $C([0, 1])$ engendré par la famille $(\phi_{\lambda_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Le but du problème est d'établir des critères de densité de l'espace W dans $C([0, 1])$ pour l'une ou l'autre des deux normes classiques N_∞ ou N_2 définies par :

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

La question préliminaire et les parties A, B, C et D sont indépendantes les unes des autres.

Question préliminaire

- 1) Montrer que $(\phi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ est une famille libre de $C([0, 1])$.

A. Déterminants de Cauchy

On considère un entier $n > 0$ et deux suites réelles finies $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ telles que $a_k + b_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leq n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_m} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_m+b_1} & \frac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}.$$

On définit la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (X - a_k)}{\prod_{k=1}^n (X + b_k)}.$$

- 2) Montrer que si $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ est injective, alors $R(X)$ est de la forme $R(X) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{X+b_k}$ avec $A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$. On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne de la matrice par $(R(a_1) \ R(a_2) \ \cdots \ R(a_n))^\top$.

- 3) En déduire que

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j)}.$$

B. Distance d'un point à une partie d'un espace normé

Soit E un espace vectoriel normé par une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que la distance d'un élément $x \in E$ à une partie non vide A de E est le réel noté $d(x, A)$ défini par :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

- 4) Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si x est adhérent à A .
 5) Montrer que si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de parties de E et si $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ alors $d(x, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n)$.

Pour $x \in E$, on note $B_x = \{y \in E ; \|y - x\| \leq \|x\|\}$. On considère un sous-espace vectoriel V de dimension finie de E . Les parties de V fermées et bornées sont dites *compactes*.

- 6) Montrer que $B_x \cap V$ est compacte et que $d(x, V) = d(x, B_x \cap V)$ pour tout $x \in E$.
 7) En déduire que pour tout $x \in E$, il existe un élément $y \in V$ tel que $d(x, V) = \|x - y\|$.

C. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace euclidien

Dans cette partie, on suppose que la norme sur l'espace vectoriel E est définie à partir d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ sur E : $\|x\| = \sqrt{(x | x)}$.

- 8) Montrer que si V est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , alors pour tout $x \in E$, la projection orthogonale de x sur V est l'unique élément $y \in V$ vérifiant $d(x, V) = \|x - y\|$.

Pour tout suite finie $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, on désigne par $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le déterminant de la matrice de Gram d'ordre n définie par :

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} (x_1 | x_1) & (x_1 | x_2) & \cdots & (x_1 | x_n) \\ (x_2 | x_1) & (x_2 | x_2) & \cdots & (x_2 | x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n | x_1) & (x_n | x_2) & \cdots & (x_n | x_n) \end{pmatrix}.$$

- 9) Montrer que $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ si et seulement si la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) est liée.

- 10) On suppose que la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$d(x, V)^2 = \frac{G(x_1, x_2, \dots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

D. Comparaison des normes N_∞ et N_2

Pour toute partie A de $C([0, 1])$, on note \overline{A}^∞ et \overline{A}^2 les adhérences de A pour les normes N_∞ et N_2 respectivement. Pour $f \in C([0, 1])$, la notation $d(f, A)$ désigne toujours la distance de f à A relativement à la norme N_2 (on ne considérera jamais, dans l'énoncé, la distance d'un élément à une partie relativement à la norme N_∞).

On admet le théorème d'approximation de Weierstraß : l'espace vectoriel des fonctions polynomiales est dense dans $C([0, 1])$ pour N_∞ .

- 11) Montrer que pour tout $f \in C([0, 1])$, $N_2(f) \leq N_\infty(f)$. En déduire que pour toute partie A de $C([0, 1])$, on a $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$.

On considère l'ensemble $V_0 = \{f \in C([0, 1]); f(0) = 0\}$, et l'on rappelle que ϕ_0 désigne la fonction constante 1.

- 12) Montrer que $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$.

- 13) En déduire que V_0 est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 , mais n'est pas dense pour la norme N_∞ .

- 14) Montrer que si V est un s.e.v. d'un e.v.n, alors son adhérence \overline{V} est également un espace vectoriel.

- 15) Montrer qu'un s.e.v. V de $C([0, 1])$ est dense pour la norme N_∞ si, et seulement si, $\phi_m \in \overline{V}^\infty$ pour tout entier $m \geq 0$.

- 16) En déduire qu'un s.e.v. V de $C([0, 1])$ est dense pour la norme N_2 si, et seulement si, $\phi_m \in \overline{V}^2$ pour tout entier $m \geq 0$.

E. Un critère de densité de W pour la norme N_2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n l'espace vectoriel engendré par la famille finie $(\phi_{\lambda_k})_{0 \leq k \leq n}$.

- 17) Montrer que l'espace W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 si et seulement si $\lim_n d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0$.

- 18) Montrer que

$$\forall \mu \geq 0: d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{k=0}^n \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}.$$

- 19) Montrer que la suite $\left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 1 pour tout $\mu \geq 0$ si, et seulement si, la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

On pourra pour cela étudier les variations de la fonction $x \in [0, \mu] \mapsto \frac{\mu - x}{x + \mu + 1}$.

- 20) En déduire que l'espace W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 si et seulement si la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente (s'il existe k tel que $\lambda_k = 0$, on l'exclue de la somme).

F. Un critère de densité de W pour la norme N_∞

- 21) Montrer que si W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_∞ , alors la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

- 22) Soit $\psi = \sum_{k=0}^n a_k \phi_{\lambda_k} \in W_n$. Montrer que si $\lambda_k \geq 1$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, alors pour tout $\mu \geq 1$:

$$N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leq N_2 \left(\mu \phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^n a_k \lambda_k \phi_{\lambda_k-1} \right).$$

23) On suppose que la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (i) & \lambda_0 = 0 \\ (ii) & \lambda_k \geq 1 \text{ pour tout } k \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que, sous ces conditions, si la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente, alors W est dense dans $C([0, 1])$ pour N_∞ .

24) Montrer que la conclusion précédente est encore valable si l'on remplace la condition (ii) par la condition plus faible (ii'): $\inf_{k \geq 1} \lambda_k > 0$.