CCMP Corrigé (provisoire) de la deuxième épreuve de mathématiques MP 2009

Question préliminaire

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n}$ tels que $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < .... < \lambda_n$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \phi_{\lambda_k} = 0$.
Raisonnons par récurrence.
On a pour tout $x \in]0,1]$, $\lambda_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \lambda_k x^{\lambda_k - \lambda_1} = 0$, puis en tendant x vers 0, on obtient que $\lambda_1 = 0$.
Soit $m \in [[1, n-1]]$, supposons que pour tout $k \in [[1, m]]$, $\lambda_k = 0$ alors $\sum\limits_{k=m+1}^{n} \lambda_k \phi_{\lambda_k} = 0$ et donc pour tout $x \in]0,1]$, $\lambda_{m+1} + \sum\limits_{k=m+2}^{n} \lambda_k x^{\lambda_k - \lambda_{m+1}} = 0$, puis en tendant x vers 0, on obtient que $\lambda_{m+1} = 0$. Ainsi pour tout $k \in [[1, n]]$, $\lambda_k = 0$ puis la famille $(\phi_{\lambda_k})_{1\leq k\leq n}$ est une famille libre de $C([0,1])$.
Enfin la famille $(\phi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ est une famille libre de $C([0,1])$.

A. Déterminants de Cauchy.

2) On suppose $R(X)$ est de la forme $R(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{A_k}{X + b_k}$.
On multiplie la dernière colonne C_n par A_n et on lui ajoute la combinaison linéaire des autres colonnes $\sum\limits_{i=1}^{n-1} A_k C_k$.
On obtient :

$$A_n D_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & .... & R(a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & & R(a_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & .... & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & & R(a_n) \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dérnière colonne, on obtient

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$$

3)
S'il existe $(k_1, k_2) \in [[1, n]]$ tel que $k_1 \neq k_2$ et $a_{k_1} = a_{k_2}$ ou $b_{k_1} = b_{k_2}$ alors $D_n = 0$, et alors

$$D_n = \frac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} (a_i + b_j)}$$

Supposons maintenant que les termes de la suite $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ sont deux à deux distincts ainsi pour la suite $(b_k)_{1\leq k\leq n}$.

Par récurrence montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \dfrac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}(a_i+b_j)}$.

Pour $n=1$ on a $D_1 = \dfrac{1}{a_1+b_1}$.

Soit $n \geq 2$, supposons que $D_{n-1} = \dfrac{\prod\limits_{1\le i<j\le n-1}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le n-1\\1\le j\le n-1}}(a_i+b_j)}$.

On a d'après la question précédente

$$A_nD_n = R(a_n)D_{n-1}$$

On a $R(X) = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{A_k}{X+b_k}$ donc $A_n = ((X+b_n)R(X))_{x=-b_n} = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(-b_n-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(-b_n+b_k)} = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_k+b_n)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_n-b_k)}$

et $R(a_n) = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_n+b_k)}$ donc puisque $A_n \neq 0$

$$D_n = \frac{R(a_n)}{A_n}D_{n-1} = \frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}(a_i+b_j)}$$

4) Soit

$d(x,A)=0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists a\in A\,,\|x-a\|<\varepsilon \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\ B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset \Longleftrightarrow x$ est adhérent à A.

5) Supposons que $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de parties de E telle que $A = \bigcup\limits_{n\geq 0} A_n$.
Soit $x \in E$.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = d(x, A_n)$ et $\beta = d(x, A)$.
Puisque $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante et $A = \bigcup\limits_{n\geq 0} A_n$, alors $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante minorée par β, donc la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ converge vers un réel α, on a $\beta \leq \alpha$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $y \in A$ tel que $\beta \leq \|y-x\| < \beta+\varepsilon$
$y \in A$ donc il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que $y \in A_{n_0}$ et alors $\alpha_{n_0} \leq \|y-x\| < \beta+\varepsilon$.
donc $\alpha < \beta+\varepsilon$.
On fait tendre ε vers 0, on a $\alpha \leq \beta$.
Enfin $d(x,A) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} d(x,A_n)$.

On considère un sous-espace vectoriel V de *dimension finie* de E, et on note $B = \{y \in E;\ \|y-x\| \leq \|x\|\}$.

6) On a la partie B est un fermé de E et $B \subset \bar{B}(0, 2\|x\|)$ donc B est bornée.
Ainsi $B \cap V$ fermée bornée de V qui est de dimension finie, donc $B \cap V$ est compacte.
Soit $x \in E$, on a $B\cap V \subset V$ donc $d(x,V) \leq d(x, B\cap V)$.
Soit $y \in V$,
si $y \in B$ alors $y \in B \cap V$ et donc $d(x, B\cap V) \leq d(x,y)$.

si $y \notin B$ alors $\|y-x\| > \|x\| = \|x-0\| \geq d(x, B\cap V)$ car $0 \in B \cap V$
donc pout tout $y \in V$, $d(x, B\cap V) \leq d(x,y)$, donc $d(x, B\cap V) \leq d(x,V)$.
Ainsi $d(x, B\cap V) = d(x,V)$.

7) On a l'application $\begin{array}{ccc} B\cap V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \|y-x\| \end{array}$ est continue sur le compact $B\cap V$, donc bornée et atteint sa borne inférieure sur $B\cap V$, alors il existe $y \in B\cap V$ tel que $d(x, B\cap V) = \|x-y\|$.
D'après la question **6)** $d(x,V) = d(x, B\cap V)$ donc $d(x,V) = \|x-y\|$.

C. Distance d'un point à un sous-espce de dimension finie dans un espace euclidien.

Dans cette partie, on suppose que la norme sur l'espace vectoriel E est définie à partir d'un produit scalaire $(. \mid .)$ sur E : $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.

8) Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et π la projection orthogonale sur V (elle existe car V est de dimension finie donc il admet un supplémentaire orthogonal)
Soit $x \in E$, , on a pour tout $v \in V$, $\| x-v \|^2 = \| x-\pi(x) \|^2 + \| \pi(x)-v \|^2$ car $x-\pi(x) \in V^{\perp}$ et $\pi(x)-v \in V$.
donc pour tout $v \in V$ $\| x-\pi(x) \|^2 \leq \| x-v \|^2$ et alors $\| x-\pi(x) \| \leq d(x,V)$
Comme $\pi(x) \in V$ alors $d(x,V) = \| x-\pi(x) \|$.
Supposons qu'il existe $y \in V$ tel que $d(x,V) = \|x-y\|$, alors $\| x-\pi(x) \| = \|x-y\|$
On a $\| x-y \|^2 = \| x-\pi(x) \|^2 + \| y-\pi(x) \|^2$ car $x-\pi(x) \in V^{\perp}$ et $y-\pi(x) \in V$.
donc $\| y-\pi(x) \|^2 = 0$ et alors $y = \pi(x)$.
D'où l'unicité.

9) Soient $(x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n$ et V un sous espce vectoriel de E de dimension n contenant $Vect(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Notons $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de V et $M = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(x_1, x_2, ..., x_n)$. la matrice du système de vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dans la base $\mathcal{B}_0$.
On a $M(x_1, x_2, ..., x_n) = {}^tM.M$.
En effet, posons pour tout $j \in [[1,n]]$, $x_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$, on a $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Posons ${}^tM.M = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On a pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j} = (x_i \mid x_j)$.
Donc $rg(M(x_1, x_2, ..., x_n)) = rg({}^tM.M) = rg(M) = rg(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Ainsi $G(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est liée.

10) On suppose que la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre.
Soit $x \in E$.
On a

$$G(x_1, x_2, ..., x_n, x) = \begin{vmatrix} & & & (x_1 \mid x) \\ M(x_1, x_2, ..., x_n) & & & \vdots \\ & & & (x_n \mid x) \\ (x \mid x_1) & \cdots & (x \mid x_n & \|x\|^2 \end{vmatrix}$$

Soit π le projecteur orthogonal sur V.
$\forall i \in [[1,n]]$, $(x_i \mid x) = (x_i \mid \pi(x)) + (x_i \mid x-\pi(x)) = (x_i \mid \pi(x))$ car $x-\pi(x) \in V^{\perp}$.
$\|x\|^2 = \|x-\pi(x)\|^2 + \|\pi(x)\|^2$.
donc

$$G(x_1,x_2,...,x_n,x) = \begin{vmatrix} & & & 0 \\ M(x_1,x_2,...,x_n) & & & \vdots \\ & & & 0 \\ (\pi(x)\mid x_1) & \cdots & (\pi(x)\mid x_n & \|x-\pi(x)\|^2 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} & & & (x_1\mid \pi(x)) \\ M(x_1,x_2,...,x_n) & & & \vdots \\ & & & (x_n\mid \pi(x)) \\ (\pi(x)\mid x_1) & \cdots & (\pi(x)\mid x_n & \|\pi(x)\|^2 \end{vmatrix}$$

$$= \|x-\pi(x)\|^2 G(x_1,x_2,...,x_n) + G(x_1,x_2,...,x_n,\pi(x))$$

On a d'après 9) $rg(M(x_1,x_2,...,x_n,\pi(x))) = rg(x_1,x_2,...,x_n,\pi(x))$
Donc $G(x_1,x_2,...,x_n,\pi(x)) = 0$ car $\pi(x) \in V = Vect(x_1,x_2,...,x_n)$.
Ainsi

$$G(x_1,x_2,...,x_n,x) = \|x-\pi(x)\|^2 G(x_1,x_2,...,x_n).$$

D'autre part $d(x,V) = \|x-\pi(x)\|$ et $G(x_1,x_2,...,x_n) \neq 0$ car la famille $(x_1,x_2,...,x_n)$ est libre, donc

$$d(x,V)^2 = \frac{G(x_1,x_2,...,x_n,x)}{G(x_1,x_2,...,x_n)}$$

11) Soit $f \in C([0,1])$, on a

$$N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 N_\infty(f)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = N_\infty(f).$$

Soit A une partie de $C([0,1])$ et $f \in \overset{-\infty}{A}$ alors il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} N_\infty(f_n - f) = 0$.

Comme $0 \leq N_2(f_n - f) \leq N_\infty(f_n - f)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(f_n - f) = 0$ et donc $f \in \overset{-2}{A}$.
Ainsi $\overset{-\infty}{A} \subset \overset{-2}{A}$.

On considère l'ensemble $V_0 = \{f \in C([0,1]);\ f(0) = 0\}$
12) ϕ_0 désigne la fonction constante 1.
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ de $C([0,1])$ définie par :

$$\forall n \geq 1\ ,\ \ f_n(x) = \begin{cases} n.x & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ \\ 1 & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in V_0$.

$$(N_2(f_n - \phi_0))^2 = \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(x) - 1|^2\,dx = \frac{1}{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\phi_0 \in \overset{-2}{V_0}$.

13) Soit $g \in C([0,1])$ et f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = g(x) - g(0)$ pour tout $x \in [0,1]$, donc $f \in V_0$ et $g = f + g(0)\phi_0$.

On a $\phi_0 \in \overset{-2}{V_0}$ donc il existe une suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de V_0 telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(\varphi_n - \phi_0) = 0$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(g(0)\varphi_n - g(0)\phi_0) = |g(0)| \lim\limits_{n\to+\infty} N_2(\varphi_n - \phi_0) = 0$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ $g_n = f + g(0)\varphi_n$, on a $g_n \in V_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(g_n - g) = 0$.

Donc $g \in \overset{-2}{V_0}$ et alors V_0 est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.

On a $\phi_0 \notin \overset{-\infty}{V_0}$, en effet , sinon il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ de V_0 qui converge uniformément vers ϕ_0.

En particulier $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers ϕ_0 sur $[0,1]$ et donc $\phi_0(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$ ce qui est absurde.

Donc V_0 n'est pas dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

14) Supposons que V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé.

On a $V \subset \overline{V}$ donc $\overline{V} \neq \varnothing$.

Soient x et y deux éléments de $\overline{V}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de V qui convergent respectivement vers x et y.

On a la suite $(x_n + \lambda y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de V converge vers $x + \lambda y$.

Donc $x + \lambda y \in \overline{V}$ et alors $\overline{V}$ est également un espace vectoriel.

15) Soit V un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$.

On suppose que V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞ alors il est clair que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overset{-\infty}{V} = C([0,1])$.

Réciproquement supposons que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overset{-\infty}{V}$ et soit $f \in C([0,1])$.

Soit $\varepsilon > 0$, on a d'après le théorème de Weierstrass, il existe une fonction polynomiale P définie sur $[0,1]$ telle que

$$N_\infty(P - f) \leq \varepsilon$$

Puisque pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overset{-\infty}{V}$ et $\overset{-\infty}{V}$ est un espace vectoriel , on a $P \in \overset{-\infty}{V}$ et alors f appartient à l'adhérence de $\overset{-\infty}{V}$ pour la norme N_∞ qui est égal à $\overset{-\infty}{V}$.

Ainsi V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

16) Soit V un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$.

On suppose que V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 alors il est clair que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overset{-2}{V} = C([0,1])$.

Réciproquement supposons que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overset{-2}{V}$ et soit $f \in C([0,1])$.

Soit $\varepsilon > 0$, on a d'après le théorème de Weierstrass, il existe une fonction polynomiale P définies sur $[0,1]$ telle que

$$N_\infty(P - f) \leq \varepsilon$$

D'après la question 11) on alors

$$N_2(P - f) \leq \varepsilon$$

Puisque pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overset{-2}{V}$ et $\overset{-2}{V}$ est un espace vectoriel , on a $P \in \overset{-2}{V}$ et alors f appartient à l'adhérence de $\overset{-2}{V}$ pour la norme N_2 qui est égal à $\overset{-2}{V}$.
Ainsi V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.

E. Un critère de densité de W pour la norme $\mathbf{N_2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n l'espace vectoriel engendré par la famille finie $(\phi_{\lambda_k})_{0\leq k\leq n}$.
W est le sous espace vectoriel de $C([0,1])$ engendré par la famille $(\phi_{\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

17) On a la suite $(W_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de $C([0,1])$ et $W = \underset{n\geq 0}{\cup} W_n$ donc d'après la question 5) pour tout entier $\mu \geq 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = d(\phi_\mu, W)$.
Supposons que l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 et soit ϕ_μ telle que μ entier positif, on a d'après la question 4) $d(\phi_\mu, W) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$.
Réciproquement, supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0$ alors $d(\phi_\mu, W) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0$ et donc d'après la question 4) pour tout entier entier $\mu \geq 0$, $\phi_\mu \in \overset{-2}{W}$ l'adhérence de W pour la norme N_2 et alors d'après la question 16) W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.

18) On a d'après les questions 1) et 10)

$$d(\phi_\mu, W_n)^2 = \frac{G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, ..., \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)}{G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, ..., \phi_{\lambda_n})}$$

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}$, on a $(\phi_\alpha \mid \phi_\beta) = \int_0^1 x^\alpha . x^\beta dx = \dfrac{1}{\alpha+\beta+1}$
Posons $\forall k \in [[0,n]]$ $\beta_k = \lambda_k + 1$ et $\beta = \mu + 1$.
On a $\forall k \in [[0,n]]$ $\lambda_k + \beta_k \neq 0$ et $\mu + \beta \neq 0$.
On a

$$G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, ..., \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_0+\beta_0} & \frac{1}{\lambda_0+\beta_1} & \cdots\cdots & \frac{1}{\lambda_0+\beta_n} & \frac{1}{\lambda_0+\beta} \\ \frac{1}{\lambda_1+\beta_0} & \frac{1}{\lambda_1+\beta_1} & & \frac{1}{\lambda_1+\beta_n} & \frac{1}{\lambda_1+\beta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\lambda_n+\beta_0} & \frac{1}{\lambda_n+\beta_1} & & \frac{1}{\lambda_n+\beta_n} & \frac{1}{\lambda_n+\beta} \\ \frac{1}{\mu+\beta_0} & \frac{1}{\mu+\beta_1} & & \frac{1}{\mu+\beta_n} & \frac{1}{\mu+\beta} \end{vmatrix}$$

D'après la partie **A)** on a

$$G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, ..., \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu) = \frac{\prod\limits_{0\leq i<j\leq n} (\lambda_j - \lambda_i)(\beta_j - \beta_i)}{\prod\limits_{\substack{0\leq i\leq n \\ 0\leq j\leq n}} (\lambda_i + \beta_j)} \times \frac{\prod\limits_{0\leq i\leq n} (\mu - \lambda_i)(\beta - \beta_i)}{(\mu+\beta) \prod\limits_{0\leq i\leq n} (\mu + \beta_i) \prod\limits_{0\leq i\leq n} (\lambda_i + \beta)}$$

De même on a

$$G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, ..., \phi_{\lambda_n}) = \frac{\prod\limits_{0\leq i<j\leq n} (\lambda_j - \lambda_i)(\beta_j - \beta_i)}{\prod\limits_{\substack{0\leq i\leq n \\ 0\leq j\leq n}} (\lambda_i + \beta_j)}$$

donc

$$\begin{aligned}
d(\phi_\mu, W_n)^2 &= \frac{\prod\limits_{0\leq k\leq n}(\mu-\lambda_k)(\beta-\beta_k)}{(\mu+\beta)\prod\limits_{0\leq k\leq n}(\mu+\beta_k)\prod\limits_{0\leq i\leq n}(\lambda_k+\beta)} \\
&= \frac{\prod\limits_{0\leq k\leq n}(\mu-\lambda_k)^2}{(2\mu+1)\prod\limits_{0\leq k\leq n}(\lambda_k+\mu+1)\prod\limits_{0\leq i\leq n}(\lambda_k+\mu+1)}
\end{aligned}$$

et par suite

$$d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}}\prod_{k=0}^{n}\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}$$

19) Soit $\mu \geq 0$. Supposons que la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
alors il est clair que la suite $\left(\dfrac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.

Réciproquement, supposons que pour tout $\mu \geq 0$, la suite $\left(\dfrac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1
Soit $\mu > 0$.
Considérons la fonction $h(x) = \dfrac{\mu - x}{x+\mu+1}$ pour tout $x \in [0, \mu]$.
On a h est dérivable sur $[0, \mu]$ et pour tout $x \in [0, \mu]$ $h'(x) = -\dfrac{1+2u}{(x+\mu+1)^2} \leq 0$.
Donc $\forall x \in [0, \mu]$, $0 \leq h(x) \leq \dfrac{\mu}{\mu+1} = h(0)$.
Soit $\alpha = \dfrac{2\mu+1}{2(\mu+1)}$, on a $\alpha \in \left]\dfrac{\mu}{\mu+1}, 1\right[$.
La suite $\left(\dfrac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0$ on ait

$$h(\lambda_k) = \frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1} > \frac{2\mu+1}{2(\mu+1)} \quad .$$

donc $\forall k \geq k_0$, $\lambda_k > \mu$.
Ainsi la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

20) D'après la question 17) l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0$.
Donc il suffit de montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0 \iff$ la série $\sum\limits_k \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.
On a la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels > 0 deux à deux distincts.
Supposons pour tout entier $\mu \geq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ alors en particulier pour $\mu = 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\lambda_k}{\lambda_k+1} = 0$,
donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{\lambda_k}\right) = +\infty$.
D'autre part on sait que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \ln(1+x) \leq x$.
Donc $\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{\lambda_k}\right) \leq \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{\lambda_k}$ et alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{\lambda_k} = +\infty$.

Ainsi la série $\sum\limits_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

Réciproquement supposons la série $\sum\limits_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente et soit μ un entier positif .

La suite $(d(\phi_\mu, W_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée par 0, donc converge , soit $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n)$.

On a $\alpha = 0$.

Car sinon $\alpha > 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{d(\phi_\mu, W_n)}{d(\phi_\mu, W_{n-1})} = 1.$$

D'après la question 19) on a la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0$ $\lambda_k > \mu$.

Posons $\forall k \geq 0$, $u_k = \ln\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_k}\right) - \ln\left(1 + \frac{\mu+1}{\lambda_k}\right)$.

On a $u_k = -\frac{2\mu+1}{\lambda_k} + \underset{k\longmapsto+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)$ donc $u_k \underset{k\longmapsto+\infty}{\sim} -\frac{2\mu+1}{\lambda_k}$.

Comme la série $\sum\limits_k -\frac{2\mu+1}{\lambda_k}$ diverge et à termes de signe constant, alors la série $\sum\limits_k u_k$ diverge et vaut $-\infty$.

D'autre part, en posant $A = \sum\limits_{k=0}^{k_0-1} \ln\left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)$ on a

$$\ln(d(\phi_\mu, W_n)) = -\frac{1}{2}\ln(2\mu+1) + A + \sum_{k=k_0}^{n} u_k.$$

et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(d(\phi_\mu, W_n)) = -\infty$, donc $\alpha = 0$ ce qui est absurde.

F. Un critère de densité de W pour la norme $\mathbf{N_\infty}$.

21) Supposons que W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞ alors d'après la question 11) W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 et donc d'après la question 20) on a la série $\sum\limits_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

22) Soit $\psi = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k.\phi_{\lambda_k}$ un élément quelconque de W_n. On suppose que $\lambda_k \geq 1$ pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$, et soit $\mu \geq 1$,on a :

$$\begin{aligned}
N_\infty(\phi_\mu - \psi) &= \sup_{x\in[0,1]} \left| x^\mu - \sum_{k=0}^{n} a_k.x^{\lambda_k} \right| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \mu \int_0^x t^{\mu-1}dt \; - \sum_{k=0}^{n} a_k.\lambda_k \int_0^x t^{\lambda_k-1}dt \right| \\
&\leq \int_0^1 \left| \mu t^{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k.\lambda_k t^{\lambda_k-1} \right| dt
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz on a

$$N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leq \left(\int_0^1 \left| \mu t^{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k.\lambda_k t^{\lambda_k-1} \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = N_2\left(\mu\phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k.\lambda_k \phi_{\lambda_k-1} \right)$$

23) On suppose que la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (i): & \lambda_0 = 0 \\ (ii): & \lambda_k \geq 1 \text{ pour tout } k \geq 1. \end{cases}$$

et que la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.
On pose $\forall k \geq 1$, $\lambda_k' = \lambda_k - 1$, on a $(\lambda_k')_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels ≥ 0 deux à deux distincts.

On a $\forall k \geq 1 \quad \frac{1}{\lambda_k} \leq \frac{1}{\lambda_k'}$ donc la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k'}$ est divergente.
Posons W' le sous espace vectoriel de $C([0,1])$ engendré par la famille $(\phi_{\lambda_k'})_{k\in\mathbb{N}^*}$, on a d'après la question 20) W' est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.
Soit μ un entier ≥ 1 , on a $\mu.\phi_{\mu-1} \in C([0,1])$ et soit $\varepsilon > 0$, il existe $g \in W'$ tel que $N_2(\mu.\phi_{\mu-1} - g) \leq \varepsilon$.
Il existe $n \in \mathbb{N}$ et une suite $(\alpha_k)_{0\leq k\leq n}$ de réels tels que $g = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_{\lambda_k'}$.
On a daprès la question 22) $N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leq N_2\left(\mu\phi_{\mu-1} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_{\lambda_k'}\right) \leq \varepsilon$ où $\psi = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\lambda_k} \phi_{\lambda_k}$.
Il est clair que $\psi \in W_n \subset W$.
Ainsi pour tout entier $\mu \geq 1$ on a $\phi_\mu \in \overline{W}^{\infty}$.
On a $\lambda_0 = 0$, donc $\phi_0 \in W \subset \overline{W}^{\infty}$.
D'après la question 16) W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

24) Si on remplace la condition (ii) par la condition plus faible :

$$(ii\ ') : \quad \inf_{k\geq 1} \lambda_k > 0$$

Posons $\alpha = \inf_{k\geq 1} \lambda_k > 0$ alors pour tout $k \geq 1$, on a $\lambda_k \geq \alpha$ et alors $\frac{\lambda_k}{\alpha} \geq 1$, $\frac{\lambda_0}{\alpha} = 0$ et la série $\sum_k \frac{\alpha}{\lambda_k}$ diverge
Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\beta_k = \frac{\lambda_k}{\alpha}$ et $V = Vect(\phi_{\beta_k})_{k\in\mathbb{N}}$, on a d'après la question 23), V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.
Soit $f \in C([0,1])$ et $\varepsilon > 0$, on a la fonction $g : x \longmapsto f\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ est un élément de $C([0,1])$, donc il existe $h \in V$ tel que

$$N_\infty(h - g) \leq \varepsilon$$

$h \in V$, donc il exsite $n \in \mathbb{N}$ et une suite $(a_k')_{0\leq k\leq n}$ de réels tels que $h = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_{\beta_k}$.
On a en faisant le changement de variable $y = x^{\frac{1}{\alpha}}$

$$N_\infty(h - g) = \sup_{x\in[0,1]} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k x^{\beta_k} - f\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right| = \sup_{y\in[0,1]} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k y^{\lambda_k} - f(y)\right| = N_\infty(P - f\ )$$

Où $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_{\lambda_k} \in W$
donc

$$N_\infty(P - f\ ) \leq \varepsilon$$

Ainsi W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.