Séries entières — Équations différentielles

1. Rayon de convergence

1.1. Définition.

Définition 1. *Une série entière est une fonction de la forme* $z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$*, où* $(a_n)_n$ *est une suite complexe.*

La variable z est complexe en général, mais peut être considérée comme réelle par restriction, notamment quand on étudie la fonction. Dans des problèmes, on peut aussi considérer une variable matricielle, mais la théorie est hors programme et non abordée ici.

Théorème et définition 1 (Lemme d'Abel)**.** *On a l'égalité*

$$\sup\left\{r \geqslant 0\,;\, \sum a_n r^n \text{ est ACV}\right\} = \sup\left\{r \geqslant 0\,;\, (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\right\}.$$

Cette borne supérieure, souvent notée R, s'appelle rayon de convergence *de la série entière* $\sum a_n z^n$*. On a* $R \in [0, +\infty]$.

Autrement dit, si R est le rayon de convergence, le plan complexe est séparé en trois zones :
— si $|z| < R$, *i.e.* si $z \in B(0, R)$, alors la série entière converge absolument ;
— si $|z| > R$, la série entière diverge grossièrement (la suite $(a_n z^n)_n$ n'est même pas bornée) ;
— si $|z| = R$, on ne peut rien dire en général, cela dépend de la série ;
— restriction à $\mathbb{R}$: ACV sur $]-R, R[$, indécision en $\pm R$ et DV grossière en dehors de $[-R, R]$.
— en utilisant quelques propriétés de base des séries numériques, on peut en déduire d'autres expressions du rayon de convergence, utiles à l'occasion :

$$\forall (a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} :\ \sum a_n \text{ ACV} \Longrightarrow \sum a_n \text{ CV} \Longrightarrow \lim a_n = 0 \Longrightarrow (a_n)_n \text{ est bornée} \qquad \therefore$$

$$R = \sup\left\{r \geqslant 0\,;\, \sum a_n r^n \text{ est ACV}\right\} = \sup\left\{r \geqslant 0\,;\, \sum a_n r^n \text{ CV}\right\}$$
$$= \sup\left\{r \geqslant 0\,;\, \lim a_n r^n = 0\right\} = \sup\left\{r \geqslant 0\,;\, (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\right\}.$$

1.2. Propriétés.

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
i) Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
ii) Si $a_n = \Theta(b_n)$ (en particulier, si $a_n \sim C b_n$ avec $C \neq 0$), alors $R_a = R_b$.
iii) Si $\sum (a_n + b_n) z^n$ est de rayon de convergence R, alors $R = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$ et $R \geqslant R_a = R_b$ sinon.

1.3. Calcul.

Les deux premiers moyens de détermination du rayon de convergence, que l'on utilise souvent ensemble, sont la recherche d'équivalents et la règle de d'Alembert. Si le quotient de deux termes consécutifs est plus simple que le terme générique lui-même ou s'il admet un équivalent plus simple que celui de ce terme, on utilise la règle de d'Alembert directement.

Exemple 1. Déterminons le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} C n^{\alpha} (\ln n)^{\beta} z^n$ avec $(C, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. Pour $u_n = C n^{\alpha} (\ln n)^{\beta} z^n$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} \times \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\beta} \times \frac{z^{n+1}}{z^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \times 1 \times z = z.$$

Il s'ensuit que la série converge absolument pour $|z| < 1$ et diverge grossièrement pour $|z| > 1$, donc que $R = 1$.

Exemple 2. De la même manière, le rayon de convergence de $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} z^n$, où P et Q appartiennent à $\mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ et $Q(n) \neq 0$ pour tout $n \geqslant n_0$ (un tel entier n_0 existe toujours si Q n'est pas le polynôme nul) vaut 1.

Exemple 3. Si prendre le quotient ne simplifie pas la recherche d'équivalents, on commence par s'intéresser au terme générique avant, éventuellement, d'appliquer la règle de d'Alembert à cet équivalent. Ainsi, pour déterminer le RCV de $\sum (\sqrt[n]{n} - 1) z^n$, on calcule d'abord $\sqrt[n]{n} - 1 = \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right) - 1 \sim \frac{\ln n}{n}$, puis on applique la règle de d'Alembert à la série entière $\sum \frac{\ln n}{n} z^n$ pour trouver $R = 1$.

La règle de d'Alembert porte sur les séries et non spécifiquement sur les séries entières. On l'applique donc à la suite $\big(|a_n z^n|\big)_n$ et non à la suite $(a_n)_n$. C'est important en matière de précision de la rédaction, mais c'est aussi un moyen de traiter des séries avec une infinité de termes a_n nuls, ce qui est très fréquent (ne serait-ce que quand la série est paire ou impaire). Toutefois, si $a_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant n_0$ *et* si $\lim |a_{n+1}/a_n| = \ell$, on peut se contenter de conclure directement que $R = 1/\ell$ avec la convention $1/\infty = 0$ et $1/0 = +\infty$. Attention, toutefois, à ne jamais utiliser ce raccourci si $a_n = 0$ pour une infinité de n.

Exemple 4. Pour montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ (dont la somme vaut $\sin x$) a un rayon de convergence infini, on ne s'occupe pas du quotient $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, non défini pour n pair, vu que $a_{2k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ et l'on calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On peut aussi trouver le rayon de convergence sans la règle de d'Alembert, en montrant une double inégalité.

Exemple 5. Soit la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (dont la somme vaut $-\ln(1-x)$). Si $x = 1$, alors la série diverge (série harmonique), d'où $R \leqslant 1$. Mais la suite $\left(\dfrac{1^n}{n}\right)_n$ est bornée, donc $R \geqslant 1$, soit, finalement, $R = 1$.

La série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n) x^n$ diverge (grossièrement) pour $x = 1$, donc $R \leqslant 1$. En revanche, si $0 \leqslant r < 1$, alors $\lim (\ln n) r^n = 0$ par croissances comparées, donc la suite $\big((\ln n) r^n\big)_n$ est bornée, donc $R \geqslant r$ pour tout $r < 1$, d'où $R \geqslant 1$, soit $R = 1$. Ces exemples se traitent aussi facilement avec la règle de d'Alembert.

Les deux principaux cas où la règle de d'Alembert <u>ne peut pas</u> s'appliquer à $\sum a_n z^n$ est celui où la suite des quotients $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ n'a pas de limite et celui où l'on part d'une suite générique. Il faut alors procéder par double inégalité (minorer et majorer R par la même constante sauf, évidemment, pour montrer que $R = +\infty$, auquel cas une minoration suffit). Procéder par double inégalité peut également être pertinent, même si la règle de d'Alembert s'applique, comme on l'a vu à l'exemple 5. L'usage du lemme d'Abel (*i.e.* le fait de pouvoir librement utiliser la convergence (absolue) de la série ou le caractère borné de son terme général) est alors très souvent utile.

Exemple 6. Un exemple instructif d'inapplicabilité de la règle de d'Alembert aux suites génériques est donné par le rayon de la série dérivée : si $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R, alors $\sum n a_n z^{n-1}$ admet pour rayon de convergence $R' = R$.
Preuve. De $a_n r^n = \mathfrak{o}\big(n a_n r^{n-1}\big)$, on tire $R' \leqslant R$. En particulier, si $R = 0$, alors $R' = R = 0$. Si $R > 0$, soient des réels tels que $0 < r < r' < R$. Alors,

$$n a_n r^{n-1} = \frac{n}{r'} \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1} \times a_n r'^n = \mathfrak{o}(a_n r'^n) \quad \text{(croissances comparées).}$$

Or, $\sum a_n r'^n$ est ACV car $r' < R$, donc il en va de même de $\sum n a_n r^{n-1}$ par le théorème de comparaison, ce qui entraîne $R' \geqslant r$ par le lemme d'Abel. Ainsi, $\forall r < R$: $R' \geqslant r$, soit $R \leqslant R'$, d'où finalement $R = R'$.

Proposition 1. Produit de Cauchy de deux séries entières. *Soient* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *et* $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* R_a *et* R_b. *Alors,* $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ *a pour rayon de convergence* $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ *et, pour tout* $z \in B\big(0, \min(R_a, R_b)\big)$*, on a* $h(z) = f(z) g(z)$.

Contrairement au cas de la somme, on ne peut rien dire de plus précis, même si $R_a \neq R_b$, comme le montrent les exemples $\dfrac{1}{1-x} \times \dfrac{1}{2-x}$ et $\dfrac{1}{1-x} \times (1-x)$.

2. Somme d'une série entière

Dans tout le paragraphe, on se donne une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$ (*i.e.* $R \neq 0$) et l'on considère la fonction définie sur $]-R, R[$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Théorème 1. *1. Une série entière de rayon de convergence R définit une fonction continue de la variable complexe sur le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z|\} < R$.*

2. La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge normalement sur tout segment $[-r, r]$ avec $r < R$.

3. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et les dérivées de f s'obtiennent en dérivant f terme à terme, la convergence des dérivées étant normale sur tout segment $[-r, r]$ avec $r < R$. Autrement dit, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)\, a_n x^{n-p} \overset{(k=n-p)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p+k)!}{k!}\, a_{p+k} x^k.$$

4. Il y a unicité du développement en série entière. Autrement dit :

$$\left[\exists r > 0,\ \forall x \in]-r, r[\colon\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right] \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\colon a_n = b_n.$$

5. Plus précisément, un DSE est toujours un développement de Taylor. Ainsi, si $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul R et si l'on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$, alors $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

6. La somme d'une SE est paire (resp. impaire) si, et seulement si, elle est de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$ (resp. $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$).

8. On peut intégrer une série entière terme à terme sur tout <u>segment</u> inclus dans $]-R, R[$.

— L'unicité du DSE sert fréquemment, notamment dès qu'interviennent des équations différentielles linéaires. Il est nécessaire pour l'appliquer de vérifier que le rayon de convergence de la série est non nul. De fait, les séries $\sum_{n=0}^{\infty} n!^2\, x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ sont égales puisqu'elles ont un rayon de convergence nul et qu'elles prennent la même valeur (1, en l'occurrence) en 0.

— Si $R = +\infty$, il y a CVN sur tout segment, mais il n'y a CVN sur $\mathbb{R}$ que si $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et CVU que si $(a_n)_n$ est nulle à.p.c.r. (toute limite uniforme d'une suite de polynômes sur $\mathbb{R}$ est un polynôme (exercice)).

Le corollaire ci-dessous est une conséquence immédiate du dernier item du théorème 1. Plutôt que de l'apprendre, il est est plus utile de comprendre comment il fonctionne dans l'exemple 7.

Corollaire 1. *Si $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, si $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est telle que $\|f\|_\infty < R$, alors $\int_a^b S(f(t))\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b f(t)^n\,\mathrm{d}t$.*

Exemple 7. DSE de $J(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x\cos t)\,\mathrm{d}t$. Sous réserve de validité de la permutation série/intégrale et en utilisant le développement en série entière de cosinus et la valeur des intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,\mathrm{d}t$, il vient

$$J(x) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x\cos t)^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} W_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi}{2^{2n+1} n!^2}\, x^{2n}.$$

Le rayon de convergence du cosinus étant infini, il y a convergence normale, donc uniforme, à x fixé, de la série de fonctions de terme général $t \longmapsto (-1)^n \dfrac{(x\cos t)^n}{(2n)!}$ sur $\mathbb{R}$ et, *a fortiori*, sur $[0, \pi/2]$, ce qui valide l'interversion.

La nature de la série entière et les propriétés de la fonction somme (en cas de convergence) sur le *cercle de convergence*, c'est-à-dire l'ensemble des complexes de module R ont été largement étudiées et sont hors programme. Toutefois, les outils au programme permettent d'aborder la question et un certain nombre de situations sont fréquentes. En voici quelques unes, qu'il faut savoir reconnaître et traiter (mais pas apprendre par cœur).

— Soit une série entière $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $0 < R < +\infty$. Si $(a_n R^n)_n$ n'est pas bornée, il y a divergence en tout point du cercle.

— Si $\sum a_n R^n$ est absolument convergente, il y a convergence absolue en tout point du cercle. Il y a convergence normale sur $[-R, R]$, ce qui assure en particulier la continuité de S sur $[-R, R]$.

— Si $(a_n R^n)_n$ est positive et décroissante de limite nulle, et si $\sum a_n R^n$ diverge, le domaine de convergence réel est $[-R, R[$ et le C.S.S.A. assure la convergence uniforme sur $[-R, 0[$, donc la continuité de S sur $[-R, R[$.

3. Développement en série entière d'une fonction

3.1. **Définition.**

Définition 2. *Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est* développable en série entière *sur un intervalle non trivial $]-r, r[\subset I$ s'il existe une suite réelle ou complexe $(a_n)_n$ telle que, pour tout $x \in]-r, r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.*

Proposition 2 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Soit $f\colon I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.*

$$\forall (a, x) \in I^2\colon f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour ne pas se tromper en cas de doute, il suffit de prendre $n = 0$, où elle s'écrit $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

On a vu au paragraphe précédent qu'une condition nécessaire pour que f soit développable en série entière est que f soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ et qu'alors, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Le caractère $\mathcal{C}^\infty$ n'est pas suffisant comme le montre la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ prolongée par continuité en 0 par la valeur 0 (exercice). Une fonction peut aussi être définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, mais DSE sur une partie plus restreinte, comme $(1 + x^2)^{-1}$ ou arctangente, dont le DSE est de rayon de convergence 1. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit développable en série entière sur $]-a, a[$ est qu'elle soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que son reste intégral de Taylor (avec $a = 0$) converge simplement vers 0. Notons que le théorème 1 assure que la convergence est alors uniforme sur tout segment inclus dans $]-R, R[$.

3.2. **Méthodes.** En pratique, pour montrer qu'une fonction est développable en série entière (DSE), on peut :

- Montrer que le reste donné par la formule de Taylor avec reste intégral ou la majoration de ce reste donnée par l'inégalité de Taylor-Lagrange tend vers 0 à $x \in]-R, R[$ fixé quand n tend vers l'infini. Exemples : e^x, $\cos x$, $\ln(1 + x)$...
- Se ramener à des séries entières connues par changement d'indice, substitution de x par ax^p, combinaison linéaire, produit de Cauchy, intégration ou dérivation. Exemples : $\dfrac{1}{1 + 2x^3} = \dfrac{1}{1 + (\sqrt[3]{2}x)^3}$, $\ln(1+x)$, $\arctan(x)$, e^z $(z \in \mathbb{C})$...
- Procéder par identification en résolvant un problème de Cauchy admettant une solution unique connue. Exemples : e^x, $\cos x$, $\operatorname{ch} x$, $(1 + x)^\alpha$... Voir à ce sujet la section 7.

4. Développements en série entière usuels

Ce sont les DSE figurant au programme. Il faut les connaître sur les intervalles $]-R, R[$, mais les développements limités correspondant ont déjà été vus en première année.

◇ $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, valable pour tout $z \in \mathbb{C}$, $R = +\infty$.

◇ $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, $R = +\infty$.

◇ $\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, $R = +\infty$.

$\diamond$ $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, $R = +\infty$.

$\diamond$ $\operatorname{sh} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, $R = +\infty$.

$\diamond$ $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, valable pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $R = 1$.

$\diamond$ $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, valable pour $x \in [-1, 1]$, $R = 1$. Le cas $x = \pm 1$ est intéressant.

$\diamond$ $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, valable pour $x \in]-1, 1]$, $R = 1$.

$\diamond$ $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, valable pour $x \in [-1, 1[$, $R = 1$; obtenu à partir du précédent, il est plus facile à retenir.

$\diamond$ $(1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, valable pour $x \in]-1, 1[$, $R = +\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, $R = 1$ sinon.

Bien que les deux formules ci-dessous ne soient pas exigibles, il est fortement recommandé de savoir utiliser le dernier DSE ci-dessus pour obtenir rapidement sur $]-1, 1[$:

$\diamond$ $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n$, pour $x \in]-1, 1[$, $R = 1$ et

$\diamond$ $\arcsin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $x \in [-1, 1]$, $R = 1$.

5. Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 (rappels)

5.1. Définition et structure abstraite de l'ensemble des solutions.

Définition 3. *On appelle* équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 *une équation différentielle de la forme* $(\mathcal{E})\colon y' + b(t)y = c(t)$, *avec b et c fonctions continues définies sur un intervalle réel non trivial I et à valeurs réelles (éventuellement complexes). Un problème de Cauchy est la recherche d'une solution y de $(\mathcal{E})$ vérifiant une condition initiale $y(t_0) = x_0$. On appelle équation homogène associée l'ED $(\mathcal{H})\colon y' + b(t)y = 0$.*

L'application $\phi\colon y \longmapsto y' + by$ étant linéaire, $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \operatorname{Ker}(\phi)$ est un espace vectoriel et $\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \phi^{(-1)}(\{c\})$ un espace affine dirigé par $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ et donc de même dimension que celui-ci. La linéarité montre que $\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = y_p + \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ pour n'importe quelle solution particulière y_p de $(\mathcal{E})$ et assure le principe de superposition des solutions : si y_1 (resp. y_2) est solution de $y' + by = c_1$ (resp. $y' + by = c_2$), alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de $y' + by = \lambda c_1 + \mu c_2$.

5.2. **Expression des solutions, résolution du problème de Cauchy.** L'espace $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est la droite vectorielle donnée par $\operatorname{Vect}\big(t \longmapsto \exp(-B(t))\big)$, où B est une primitive de b, ce qui s'obtient par le changement de fonction inconnue $z = y\mathrm{e}^B$. On obtient une solution particulière de $(\mathcal{E})$ en utilisant la méthode de variation de la constante, qui consiste à la chercher sous la forme $k(t)y_0(t)$, où $y_0 = \mathrm{e}^{-B}$ est solution de l'équation homogène : dans l'équation, les termes en k se simplifient et il reste $y_0(t)k'(t) = c(t)$. Il y a existence et unicité de la solution au problème de Cauchy (théorème de Cauchy-Lipschitz).

Dans certains exercices sur le comportement asymptotique des solutions, il peut être utile de savoir écrire explicitement la solution du problème de Cauchy dans le cas générique ainsi que de décrire l'ensemble des solutions. Ces formules ne sont pas à apprendre par cœur ; elles se retrouvent facilement en appliquant la variation de la constante. L'unique solution y telle que $y(t_0) = x_0$ s'écrit

$$y(t) = \mathrm{e}^{-B(t)} \left(\int_{t_0}^{t} c(\tau)\mathrm{e}^{B(\tau)}\,\mathrm{d}\tau + x_0 \mathrm{e}^{B(t_0)} \right) \qquad \text{et l'on a} \qquad \mathcal{S}_{(\mathcal{E})} = \mathrm{e}^{-B(t)} \int_{t_0}^{t} c(\tau)\mathrm{e}^{B(\tau)}\,\mathrm{d}\tau + \operatorname{Vect}\big(t \longmapsto \mathrm{e}^{-B(t)}\big).$$

5.3. **Extension. Recollement des solutions.** On considère souvent une forme un peu plus générale d'équations, à savoir $(\mathcal{E})\colon a(t)y' + b(t)y = c(t)$, avec a, b et c fonctions continues définies sur un intervalle réel non trivial I et à valeurs réelles (éventuellement complexes). Tout ce qui a trait à la linéarité reste vrai (l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel, rôle d'une solution particulière, superposition des solutions).

En revanche, on perd l'existence et l'unicité de la solution au problème de Cauchy. Sur les intervalles où a ne s'annule pas, on peut diviser l'équation par $a(t)$ et appliquer ce qu'on a vu plus haut : en particulier, $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(t \longmapsto y_0(t))$, où $y_0(t) = \exp \displaystyle\int -\frac{b(t)}{a(t)}\,\mathrm{d}t$. On procède ainsi à la résolution sur tous les intervalles maximaux sur lesquels elle ne s'annule pas, ce qui ne fait en général qu'un seul calcul et l'on obtient ainsi des solutions (I_k, y_k) qui se « recollent » pourvu que les raccords soient dérivables. Attention, si, par exemple, $a(t) = |t|$, la résolution ne donnera pas les mêmes expressions sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Exemple 8. Soit l'EDLH $(\mathcal{H}_2)\colon x(x-1)y' - (3x-2)y = 0$.

En utilisant la décomposition en éléments simples $\dfrac{3x-2}{x(x-1)} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x-1}$, on obtient comme ensemble de solutions $\mathrm{Vect}\big(x \longmapsto x^2(x-1)\big)$ sur chacun des trois intervalles $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $x \longmapsto \big[a\mathbb{1}_{]-\infty,0[}(x) + b\mathbb{1}_{[0,1[}(x) + c\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)\big]x^2(x-1)$. Comme $x^2(x-1) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2$, tous les raccordements sont dérivables en 0. En revanche, $y_d'(1) = c$ et $y_g'(1) = b$, donc $b = c$, et l'on obtient pour $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_2,\mathbb{R}}$ un espace de dimension 2 donné par

$$\mathrm{Vect}\big(x \longmapsto x^2(x-1)\mathbb{1}_{]-\infty,0[}(x),\ x \longmapsto x^2(x-1)\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\big).$$

Exemple 9. Soit l'EDLH $(\mathcal{H}_1)\colon x(x-1)y' - (2x-1)y = 0$.

En utilisant la décomposition en éléments simples $\dfrac{2x-1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$, on obtient comme ensemble de solutions $\mathrm{Vect}\big(x \longmapsto x(x-1)\big)$ sur chacun des trois intervalles $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $x \longmapsto \big[a\mathbb{1}_{]-\infty,0[}(x) + b\mathbb{1}_{[0,1[}(x) + c\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)\big]x(x-1)$. En raisonnant comme dans l'exemple 8, on obtient pour $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_1,\mathbb{R}}$ un espace de dimension 1 donné par $\mathrm{Vect}\big(x \longmapsto x(x-1)\big)$.

Exemple 10. Soit l'EDLH $(\mathcal{H}_3)\colon x(x-1)y' - (6x-2)y = 0$.

En utilisant la décomposition en éléments simples $\dfrac{6x-2}{x(x-1)} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x-1}$, on obtient comme ensemble de solutions $\mathrm{Vect}\big(x \longmapsto x^2(x-1)^4\big)$ sur chacun des trois intervalles $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $x \longmapsto \big[a\mathbb{1}_{]-\infty,0[}(x) + b\mathbb{1}_{[0,1[}(x) + c\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)\big]x^2(x-1)^4$. En raisonnant comme dans l'exemple 8, on constate que tous les raccordements sont dérivables et l'on obtient pour $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_3,\mathbb{R}}$ un espace de dimension 3 donné par.

$$\mathrm{Vect}\big(x \longmapsto x^2(x-1)^4\mathbb{1}_{]-\infty,0[}(x),\ x \longmapsto x^2(x-1)^4\mathbb{1}_{[0,1[}(x),\ x \longmapsto x^2(x-1)^4\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\big).$$

Exemple 11. Soit l'EDLH $(\mathcal{H}_0)\colon x(x-1)y' + (2x-1)y = 0$.

En reprenant la décomposition en éléments simples de l'exemple 9, on obtient les solutions $\mathrm{Vect}\left(x \longmapsto \dfrac{1}{x(x-1)}\right)$ sur chacun des trois intervalles $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Il est alors immédiat que $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_0,\mathbb{R}} = \{0\}$, espace de dimension 0.

6. Équations différentielles scalaires d'ordre 2

6.1. Équations différentielles scalaires d'ordre n.

C'est une équation de la forme

$$(\mathfrak{L})\colon y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = b.$$

En général, les a_i sont des fonctions continues ; on parle d'*équation différentielle scalaire d'ordre n à coefficients constants*, cela même si b n'est pas constante. Ces équations différentielles s'écrivent comme des systèmes différentiels d'ordre 1 : en posant $Y = \begin{pmatrix} y & y' & \cdots y^{(n-1)}\end{pmatrix}^\top$, $(\mathfrak{L})$ est équivalent à $Y' = AY$, soit

$$(\mathfrak{L}')\colon \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

C'est cette forme vectorielle qu'utilise la commande `odeint` de la bibliothèque `scipy.integrate` python et qui est au programme de physique et de l'oral Centrale maths 2.

Exemple 12. Soit l'équation du pendule $x'' + \omega^2 \sin x = 0$. On vectorialise l'équation , qui devient $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x' \\ -\omega^2 \sin x \end{pmatrix}$, soit, pour $X = \begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} X[1] \\ -\omega^2 \sin(X[0]) \end{pmatrix}$.

```
import numpy as np
import scipy.integrate as sci

def f(x, t):
    return np.array([x[1], - omega**2 * np.sin(x[0])])
T = np.linspace(0, 10, 100)
X = sci.odeint(f, np.array([0, a]), T)
    plt.plot(T, X[:, 0])
```

La commande `sci.odeint` résout de manière numérique l'équation sous les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = a$ envoie un tableau à deux colonnes, dont la première est le vecteur donnant les approximations de $x(t)$ pour $t \in T$ et la deuxième, le vecteur des approximations de $x'(t)$.

6.2. **Résolution des équations différentielles scalaires d'ordre 2.** Ce sont les équations de la forme $y'' + a_1 y' + a_0 y = b$, avec a_0, a_1 et b des fonctions continues.

Théorème 2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** *L'ensemble des solutions de* $(\mathcal{H})\colon y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ *est un espace vectoriel* $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ *de dimension 2. L'ensemble des solutions de* $(\mathcal{E})\colon y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ *est de la forme* $y_p + \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$*, où* y_p *est une solution particulière de* $(\mathcal{E})$*. Le problème de Cauchy est la recherche d'une solution* y *de* $(\mathcal{E})$ *dont les valeurs* $y(t_0)$ *et* $y'(t_0)$ *sont données. Il y a existence et unicité de la solution au problème de Cauchy.*

Le théorème est admis. Qui plus est, il n'y a pas de méthode générale au programme pour déterminer $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ ou $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$. Si les fonctions a_1 et a_0 sont des polynômes et si b est DSE, on peut, sans garantie, en chercher les solutions sous la forme d'une série entière, ce qui donne une relation de récurrence sur les coefficients de la série entière. On peut aussi en rechercher des solutions plus ou moins évidentes (constantes, polynômes, fonctions très simples). Il peut être utile de connaître la *méthode de Lagrange* (non exigible), qui n'est autre que l'extension de la méthode de variation de la constante : si y_0 est une solution de $(\mathcal{H})$, on obtient l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ en les cherchant sous la forme $k(x)y_0(x)$ car, en reportant dans l'équation, les termes en k disparaissant, laissant une équation d'ordre 1 en k'.

On traite les équations du type $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b$ de la même manière que celles d'ordre 1 en raisonnant par restriction et en recollant les fonctions pour obtenir une fonction deux fois dérivable aux points où a_2 s'annule.

6.3. **Cas des équations différentielles scalaires d'ordre 2 à coefficients constants.** Notons qu'une EDL à coefficients constants de la forme $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ se ramène à une EDL scalaire d'ordre 2 : en dérivant la première équation du système, il vient en effet

$$x_1'' = ax_1' + b(cx_1 + dx_2) = ax_1' + bcx_1 + d(x_1' - ax_1) = (a+d)x_1' - (ad - bc)x_1.$$

Si a_0 et a_1 sont des constantes, et uniquement en ce cas, on associe à l'équation $(\mathcal{H})\colon y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ le polynôme $P = X^2 + a_1 X + a_0$, qui est aussi le polynôme caractéristique de la matrice décrite au paragraphe 6.1, soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$. Si P admet deux racines réelles distinctes λ et μ, alors $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \operatorname{Vect}\big(t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t},\, t \longmapsto \mathrm{e}^{\mu t}\big)$. On retrouve ce résultat de première année en utilisant le formalisme matriciel et en diagonalisant A. Si $P = (X - \lambda)^2$, la trigonalisation de A montre que $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \operatorname{Vect}\big(t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t},\, t \longmapsto t\mathrm{e}^{\lambda t}\big)$. Enfin, si P admet deux racines complexes conjuguées $r \pm i\omega$, la diagonalisation dans $\mathbb{C}$ donne les solutions complexes de l'équation, qui sont les combinaisons linéaires complexes des fonctions $t \longmapsto \mathrm{e}^{(r \pm i\omega)t}$ et leurs parties réelles donne les solutions réelles, soit $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \operatorname{Vect}\big(t \longmapsto \mathrm{e}^{rt}\cos(\omega t),\, t \longmapsto \mathrm{e}^{rt}\sin(\omega t)\big)$.

La méthode de Lagrange permet de trouver une solution particulière de l'équation $(\mathcal{L})\colon y'' + a_1 y' + a_0 y = b$ pour une fonction b quelconque. Toutefois, il est attendu que l'on sache plutôt chercher une solution particulière sous une forme donnée dans quelques cas particuliers. En notant $P = X^2 + a_1 X + a_0$ le polynôme caractéristique de l'équation homogène :

— Si $b(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} Q(t)$ avec Q un polynôme, on cherche une solution de la forme
  - *i)* $\mathrm{e}^{\alpha t} R(t)$ avec $\deg R = \deg Q$ si $P(\alpha) \neq 0$;
  - *ii)* $\mathrm{e}^{\alpha t} t R(t)$ avec $\deg R = \deg Q$ si α est racine simple de P (donc $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) \neq 0$) ;
  - *iii)* $\mathrm{e}^{\alpha t} t^2 R(t)$ avec $\deg R = \deg Q$ si $P = (X - \alpha)^2$.

— Si $b(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, on cherche une solution de la forme
  - *i)* $t\big(\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)\big)$ si l'équation homogène est $y'' + \omega^2 y = 0$;
  - *ii)* $\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$ sinon.

7. Lien entre développement en série entière et équations différentielles linéaires

Le lien entre équations différentielles linéaires et séries entières constitue un thème d'exercices important. On peut rechercher des séries entières solution d'une E.D.L. (équation différentielle linéaire), rechercher une E.D.L. dont une série entière est solution, ou vérifier qu'une série entière est solution d'une E.D.L.

Exemple 13. *Cadre de l'étude.* Soit l'E.D.L. $(\mathcal{E})\colon 2x(x-1)y' + (2x-1)y = -1$. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière. Soit R son rayon de convergence, que l'on suppose non nul. On remplace f dans l'E.D.L., ce qui donne

$$\begin{aligned} 2x(x-1)y' + (2x-1)y &= 2x(x-1)\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} + (2x-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)\\ &= -a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\big[2ma_{m-1} - (2m+1)a_m\big]x^m. \end{aligned}$$

L'unicité du développement en série entière (on a supposé $R > 0$), montre alors que :

$$(2) \qquad \big[\forall x \in]-R,R[\colon\ 2x(x-1)f' + (2x-1)f = -1\big] \iff \begin{cases} -a_0 = -1 \\ \forall m \geqslant 1\colon\ 2ma_{m-1} - (2m+1)a_m = 0. \end{cases}$$

Premier énoncé : montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{2n} n!^2}{(2n+1)!} x^n$ *est solution de* $(\mathcal{E})$. La règle de d'Alembert, *via* le calcul

$$(3) \qquad \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{4(n+1)^2|z|}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{2n+2}{2n+3}|z| \xrightarrow[n\to\infty]{} |z|,$$

assure que $R = 1 > 0$. On vérifie alors facilement à partir de l'expression explicite de a_m que $2ma_{m-1} = (2m+1)a_m$ ce qui montre que f est bien solution de $(\mathcal{E})$ sur $]-1,1[$.

Deuxième énoncé : quelles sont les solutions de $(\mathcal{E})$ *développables en série entière ?*
Les relations (2) donnent $a_0 = 0$ et

$$a_n = \frac{2n}{2n+1}a_{n-1} = \frac{2n(2n-2)}{(2n+1)(2n-1)}a_{n-2} = \frac{2n(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2}{(2n+1)(2n-1)\times\cdots\times 3}a_0 = \frac{\big(2n(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2\big)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}\,n!^2}{(2n+1)!}.$$

Le calcul du rayon de convergence est fait par (3) et donne $R = 1$. Comme la formule (2) est une équivalence, la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{2n}\,n!^2}{(2n+1)!}\,x^n$ est la seule solution de $(\mathcal{E})$ développable en série entière.

La suite de calculs effectuée en (1) amène deux remarques techniques :

— Il est peut-être plus simple de manipuler disons, n, que a_n, mais définitivement plus simple de manipuler a_n que $\dfrac{2^{2n} n!^2}{(2n+1)!}$. C'est la raison pour laquelle, même pour répondre au premier énoncé, on ne remplace a_n par son expression en fonction de n qu'à la fin. On suit la même logique quand on détermine en cours le DSE de $(1+x)^{\alpha}$.

— On effectue des changements d'indices pour se ramener à une combinaison linéaire de séries entières à une unique série entière. Pour ce faire, on peut jouer par exemple sur le fait que $\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$, le terme d'indice $n = 0$ étant nul. Il est en effet pratique d'obtenir à la fin le moins possible de termes n'intervenant pas dans toutes les séries sommées.

8. Extension culturelle. Généralités sur les équations différentielles

Les définitions données peuvent apparaître dans un problème de concours, dans la documentation de `scipy` ou dans la littérature consultée pour les TIPE. Leur connaissance n'est pas exigible.

Une *équation différentielle ordinaire* (EDO ou ED en abrégé, *ODE* en anglais pour *ordinary differential equation*) est une équation dont l'inconnue est une fonction de la variable réelle. Elle se met sous la forme

$$F\big(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x\big) = 0,$$

où il est sous-entendu que y est une fonction de la variable x. On parle d'équations différentielles ordinaires par opposition aux *équations aux dérivées partielles* (EDP en abrégé, *PDE* en anglais pour *partial differential equations*), dont les inconnues sont des fonctions de plusieurs variables.

Exemples d'EDO : $\ddot{y} + \omega^2 y = f, \quad \ddot{y} + \dfrac{\ell}{mL^2}\dot{y} + \dfrac{g}{L}\sin\theta = 0, \quad \Sigma\vec{F} = m\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2 M}}{\mathrm{d}t^2}.$

Exemples d'EDP : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \alpha\Delta T, \quad \div \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$

Ces exemples illustrent que la théorie des équations différentielles, si elle a pris son essor et est devenue une branche à part entière des mathématiques, est née de la mise en équation des lois de la physique à partir de l'invention du calcul différentiel par Newton et Leibniz. On pourra garder cela à l'esprit en pensant que les solutions d'une E.D. décrivent l'évolution d'un système dans le temps et que la variable t représente ce temps. En particulier, il n'y a pas de discontinuité temporelle et l'on ne considère des solutions que sur un intervalle ; ainsi, on envisagera des solutions sur $\mathbb{R}_-^*$, sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}$, mais pas sur $\mathbb{R}^*$.

Dans toute la suite, on se restreint aux équations différentielles ordinaires.

Une ED du type $F\big(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x\big) = 0$ est dite *d'ordre* n, en référence à la dérivée d'ordre le plus élevé intervenant dans l'équation. Si elle peut se mettre sous la forme $F\big(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y\big) = 0$, on dit qu'il s'agit d'une équation *autonome*. Cela ne signifie malheurseusement pas qu'elle se résout toute seule, mais que si $x \longmapsto y(x)$ en est solution sur $]a, b[$, alors $x \longmapsto y(x - x_0)$ en est solution sur $]x_0 + a, x_0 + b[$. Si l'on pense à x comme à une variable modélisant le temps, cela signifie que l'équation décrivant le système est invariante dans le temps. C'est logiquement le cas des ED exprimant les lois physiques dans un système isolé.

On appelle *solution* de l'ED un couple (I, y), où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle et y une fonction définie sur I. Trivialement, si (I, y) est une solution et si $J \subset I$, alors $(J, y_{|J})$ est également solution. C'est pourquoi on a dégagé la notion de *solution maximale*, c'est-à-dire une solution (J, y) prolongeable à aucun intervalle $I \supsetneq J$. On démontre (c'est très hors programme) que toute solution peut être prolongée en une solution maximale.

On appelle problème de Cauchy la recherche d'une solution de $F\big(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x\big) = 0$ vérifiant une condition initiale du type $\big(y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)\big) = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$. Sous des hypothèses assez raisonnables, une ED admet une unique solution maximale à un problème de Cauchy donné. Attention : dans le cadre du programme, ce n'est pas le cas des EDL scalaires quand la fonction devant la dérivée de plus haut degré s'annule (*cf.* les questions de recollement plus bas).

On a précisé que les solutions d'une ED étaient définies sur un intervalle, mais pas où elles doivent prendre leurs valeurs. En particulier, il n'est pas précisé à quel espace appartient le « 0 » du membre de droite de l'ED $F\big(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x\big) = 0$. En général, y prend ses valeurs dans un espace vectoriel normé. Dans le cadre du programme (et dans les applications), on se contente de $E = \mathbb{R}^p$. Cette latitude dans le choix de l'espace d'arrivée rend relative la notion d'ordre de l'équation différentielle, dans la mesure où une ED scalaire (*i.e.* dont les solutions sont des fonctions à valeurs réelles) d'ordre n peut facilement s'écrire comme une ED d'ordre 1 à valeurs vectorielles en posant $Y = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$, comme on l'a vu au paragraphe 6.1.

9. Équations différentielles linéaires vectorielles d'ordre 1

9.1. Définition et structure.

Définition 4. *Une* équation différentielle vectorielle d'ordre 1 *est un système différentiel* $(\mathcal{E})\colon X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$*, avec* $B\colon I \to \mathbb{R}^p$*, et* $A\colon I \to \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *fonctions continues définies sur un intervalle réel non trivial* I*. Un problème de Cauchy est la recherche d'une solution* X *de* $(\mathcal{E})$ *vérifiant une condition initiale* $X(t_0) = X_0 \in \mathbb{R}^p$*. On appelle équation homogène associée l'ED* $(\mathcal{H})\colon X'(t) = A(t)X(t)$*.*

Pour $p = 1$, on retombe sur la définition 3 d'une équation différentielle scalaire d'ordre 1.

Théorème 3 (Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** *Il y a existence et unicité de la solution au problème de Cauchy. L'application définie sur $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ par $X \longmapsto X(t_0)$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ sur $\mathbb{R}^p$. En particulier,* $\dim \mathcal{S}_{\mathcal{H}} = p$. *De plus, $\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = X_p + \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ pour toute solution particulière X_p de $(\mathcal{E})$.*

9.2. **Résolution dans le cas général.** On ne connaît pas de méthode complètement générale. Il existe un algorithme, dû à Risch, qui permet originellement de calculer des primitives des fonctions construites à partir des fonctions usuelles et qui s'étend à la résolution des EDL. Cet algorithme, très complexe, est implémenté dans les logiciels de calcul formel (par opposition au calcul numérique) et fondé sur la théorie de Galois différentielle.

En notant $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_p(t) \end{pmatrix}^\top$, l'équation différentielle $X'(t) = A(t)X(t)$ s'écrit comme un système différentiel couplé en les $x_i(t)$:

$$x_i'(t) = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}(t)x_j(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant p.$$

On observe que le système est découplé si, et seulement si, A est diagonale, et l'on obtient dans ce cas $x_i'(t) = a_{i,i}(t)x_i(t)$, d'où $x_i(t) = c_i \mathrm{e}^{A_{i,i}(t)}$, où $A_{i,i}$ est une primitive de $a_{i,i}$ et c_i une constante arbitraire. On observe que l'on a bien un espace de solutions de dimension p de base $\left(\mathrm{e}^{A_{i,i}} e_i,\ 1 \leqslant i \leqslant p\right)$, où $(e_1, \ldots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour découpler le système, il est donc naturel de diagonaliser $A(t)$... si c'est possible.

9.3. **Résolution dans le cas où A est à coefficients constants et diagonalisable.** On a $A = PDP^{-1}$ et le système homogène s'écrit, par linéarité de la dérivation,

$$X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \iff (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X) \iff \begin{cases} Y = P^{-1}X \\ Y' = DY \end{cases}$$

Tout calcul fait (*cf.* cours), on obtient $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{e}^{\lambda_j t} V_j\ ;\ j \in [\![1, p]\!]\right)$, où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ et $C_j(P) = V_j$, ce qui signifie que $(V_1, \ldots, V_p)$ est une base de $\mathbb{R}^p$ formée de vecteurs propres de A rangés dans l'ordre des valeurs propres figurant dans D.

On peut appliquer cette formule ou mener à bien le calcul en résolvant le système en Y, puis en repassant en X avec $X = PY$. En pratique, il est nécessaire de calculer D et P, donc de déterminer les valeurs et vecteurs propres de A, mais le calcul de P^{-1} n'est pas utile.

L'équation complète s'écrit $P^{-1}X' = DP^{-1}X + P^{-1}B$, soit $\begin{cases} Y = P^{-1}X \\ Y' = DY + P^{-1}B \end{cases}$, étant entendu que $B = B(t)$, mais que P et D sont à coefficients constants. L'équation en Y n'est plus homogène, mais reste découplée. À cause du terme en $P^{-1}B$, le calcul de P^{-1} est cette fois-ci indispensable.

9.4. **Résolution dans le cas où A est à coefficients constants et trigonalisable.** Si A est trigonalisable, on utilise le même changement de base pour obtenir $\begin{cases} Y = P^{-1}X \\ Y' = TY + P^{-1}B \end{cases}$ Cette fois, le système n'est plus que partiellement découplé et se résout de bas en haut (si T est triangulaire supérieure).

Le point technique fondamental dans la résolution est l'égalité $(P^{-1}X)' = P^{-1}X'$ et nécessite que P^{-1} soit à coefficients constants. En revanche, que D (ou T dans le cas trigonalisable) soient à coefficients non constants n'est pas rédhibitoire. Ainsi, on peut étendre la méthode précédente au cas où A est non constante et où les matrices $A(t)$ sont codiagonalisables ou cotrigonaliables.

10. Preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Exercice 1. Les normes considérées sont des normes sur $\mathbb{R}^n$ ou obtenues par transport de telles normes.
1. Montrer que, pour $(A, X) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|A\|_1 \|X\|_\infty$.
2. Soient I un segment de $\mathbb{R}$ et $g\colon I \to \mathbb{R}^n$, une application continue. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit $G\colon I \to \mathbb{R}^n$ et l'on note $G(t) = \displaystyle\int_I g(u)\,\mathrm{d}u$ la fonction

$$G(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_I g_i(u)\,\mathrm{d}u \right) e_i \quad \text{où} \quad g(u) = \sum_{i=1}^{n} g_i(u)\, e_i.$$

a. Vérifier que l'application $g \longmapsto G$ est linéaire.
b. Montrer que $\|G\|_\infty \leqslant \displaystyle\int_I \|g(u)\|_\infty \,\mathrm{d}u$.

3. Soit $A\colon [a, b] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue. Soit $t_0 \in [a, b]$. Soit Λ l'opérateur défini jusqu'à la fin de l'exercice par

$$\forall Z \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)\colon \Lambda(Z)(t) = \int_{t_0}^{t} A(u) Z(u)\,\mathrm{d}u.$$

a. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $t \in [a, b]$, $\|A(t)\|_1 \leqslant \alpha$.
b. Montrer que Λ est linéaire et que

$$\forall Z \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n),\ \forall t \in I\colon\ \|\Lambda(Z)(t)\|_\infty \leqslant \alpha |t - t_0| \sup_{u \in I} \|Z(u)\|_\infty .$$

L'opérateur Λ est-il un endomorphisme de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$?
c. Si $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ définie récursivement par $Z_0 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ et $Z_{n+1} = \Lambda(Z_n)$, montrer que

$$\forall t \in I\colon\ \|Z_n(t)\|_\infty \leqslant \frac{\alpha^n |t - t_0|^n}{n!} \sup_{u \in I} \|Z_0(u)\|_\infty .$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère l'équation différentielle $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ sur un segment $I = [a, b]$, un point $t_0 \in I$ et le problème de Cauchy $X(t_0) = X_0$.

4. Soient X_1 et X_2 deux solutions du problème de Cauchy et $\Delta = X_1 - X_2$.
a. Montrer que $\Delta = \Lambda(\Delta)$.
b. Montrer qu'il existe une constante M telle que, pour tout entier naturel n,

$$\|\Delta(t)\|_\infty \leqslant M \alpha^n \frac{|t - t_0|^n}{n!}.$$

c. En déduire que $\Delta(t) = 0$ pour tout $t \in [a, b]$. Qu'a-t-on démontré ?

5. On définit récursivement la suite de fonctions $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ sur I par $Y_0 = X_0$ (fonction constante) et $Y_{n+1} = Y_0 + \Lambda(Y_n)$. On pose $Z_n = Y_{n+1} - Y_n$.
a. En majorant $\|Z_n\|_\infty$, montrer que la suite $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément coordonnée par coordonnée sur I. On note X sa limite.
b. Vérifier que X est solution du problème de Cauchy et conclure.

Solution. **1.** Le calcul donne

$$\left|(AX)_i\right| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}||x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \, \|X\|_\infty \leqslant \|A\|_1 \|X\|_\infty .$$

L'inégalité valant pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il vient $\|AX\|_\infty \leqslant \|A\|_1 \|X\|_\infty$.
2.a. En notant $g = (g_1, \ldots, g_n)$, la linéarité de $g_i \mapsto \displaystyle\int_I g_i$ assure celle de G.
2.b. Pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\left| \int_I g_i(u)\,\mathrm{d}u \right| \leqslant \int_I |g_i(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant \int_I \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |g_j(u)|\,\mathrm{d}u = \int_I \|g(u)\|_\infty \,\mathrm{d}u \qquad \therefore$$

$$\|G\|_\infty = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left| \int_I g_i(u)\,\mathrm{d}u \right| \leqslant \int_I \|g(u)\|_\infty \,\mathrm{d}u.$$

3.a. La continuité assure que la fonction $t \mapsto A(t)$ est bornée sur le segment $[a,b]$, donc que $t \mapsto \|A(t)\|_1$ l'est, ce qui assure l'existence d'une contante α telle que $\|A(t)\|_1 \leqslant \alpha$ pour tout $t \in [a,b]$.
3.b. La linéarité de Λ est évidente d'après la question 2.a. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\|\Lambda(Z)(t)\|_\infty &\underset{(2.b.)}{\leqslant} \int_{t_0}^{t} \|A(u)Z(u)\|_\infty \,\mathrm{d}u \underset{(1.)}{\leqslant} \int_{t_0}^{t} \|A(u)\|_1 \|Z(u)\|_\infty \,\mathrm{d}u \\ &\underset{(3.b.)}{\leqslant} \alpha|t-t_0| \sup_{\min(t_0,t)\leqslant u\leqslant \max(t_0,t)} \|Z(u)\|_\infty \leqslant \alpha|t-t_0| \sup_{u\in I} \|Z(u)\|_\infty .\end{aligned}$$

3.c. On procède par récurrence sur n. L'inégalité est triviale pour $n=0$. Si elle vaut pour $n-1$, alors, en recommençant partiellement le calcul effectué à la question précédente et en notant $M = \sup\limits_{u\in I} \|Z_0(u)\|_\infty$,

$$\|Z_n(t)\|_\infty = \|\Lambda(Z_{n-1})(t)\|_\infty \leqslant \alpha \int_{t_0}^{t} \|Z_{n-1}(u)\|_\infty \,\mathrm{d}u \leqslant \alpha \left| \int_{t_0}^{t} \frac{\alpha^{n-1}(u-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} M \,\mathrm{d}u \right| = \frac{\alpha^n |t-t_0|^n}{n!} M.$$

4.a. Par hypothèse, $X_i' = AX_i + B$ pour $i \in \{1,2\}$ et $X_1(t_0) = X_2(t_0)$.

$$\begin{aligned}\Lambda(\Delta)(t) &= \int_{t_0}^{t} A(u)\Delta(u)\,\mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} \big[A(u)X_1(u) - A(u)X_2(u)\big]\,\mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} \big(X_1'(u) - B(u)\big) - \big(X_2'(u) - B(u)\big)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{t_0}^{t} \Delta'(u)\,\mathrm{d}u = -\Delta(t) - \Delta(t_0) = \Delta(t).\end{aligned}$$

4.b. La suite $(\Delta_n)_n$ définie par $\Delta_0 = \Delta$ et $\Delta_{n+1} = \Lambda(\Delta_n)$ est constante. En lui appliquant la question 3.c, en posant $M = \sup\limits_{u\in I} \|\Delta(u)\|_\infty$, il vient

$$\|\Delta(t)\|_\infty \leqslant \alpha^n \frac{|t-t_0|^n}{n!} M.$$

4.c. Cela valant pour tout $n \in \mathbb{N}$ et le terme à droite de l'inégalité étant le terme général du DSE de $\exp(\alpha|t-t_0|)$, donc de limite nulle, on en déduit $\|\Delta(t)\|_\infty = 0$ pour tout t, soit $X_1 = X_2$. On a prouvé l'unicité de la solution au problème de Cauchy, autrement dit : il existe au plus une solution.

5.a. Par définition,

$$Z_n = \big(Y_0 + \Lambda(Y_n)\big) - \big(Y_0 + \Lambda(Y_{n-1})\big) = \Lambda(Y_n - Y_{n-1}) = \Lambda(Z_{n-1}).$$

On peut alors appliquer la question 3.c, qui donne $\|Z_n(t)\|_\infty \leqslant \alpha \dfrac{|t-t_0|^n}{n!} M$ avec cette fois $M = \sup\limits_{u\in I} \|Z_0(u)\|_\infty$ (rappelons que tous les $\sup\limits_{u\in I}$ considérés existent comme bornes supérieures de l'ensemble des valeurs prises par une fonction continue sur un segment).

On en déduit la convergence pour tout $t \in I$ de $\sum \|Z_n(t)\|_\infty$, donc la convergence coordonnée par coordonnée de la série télescopique $\sum Z_n(t) = \sum (Y_{n+1} - Y_n)$, ce qui montre la convergence de la suite $(Y_n(t))_n$ pour tout t, soit la convergence simple de la suite $(Y_n)_n$.
5.b. Pour conclure, il suffit de montrer que $X = \lim Y_n$ est solution du problème de Cauchy ; on aura alors prouvé l'existence et l'unicité de la solution. Par définition, on a donc $Y_{n+1}(t) = X_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} A(u)Y_n(u)\,\mathrm{d}u$, soit, en passant à la limite, $X(t) = X_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} A(u)X(u)\,\mathrm{d}u$, le passage à la limite se faisant sous l'intégrale par convergence uniforme et la première question. En dérivant, il vient $X'(t) = A(t)X(t)$. Enfin, en prenant $t = t_0$, il vient $X(t_0) = X_0$. □