DMS 4 (secours) — PSI* — 2025-2026 — Corrigé

Pour $\lambda \geqslant 0$, on pose ϕ_λ la fonction définie sur le segment $[0,1]$ par $\phi_\lambda(x) = x^\lambda$. Les fonctions ϕ_λ sont continues et ϕ_0 est la fonction constante égale à 1. On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $[0,1]$.

1) Le plus rapide est de noter que ϕ_λ est vecteur propre de l'opérateur $f \longmapsto \big(x \mapsto xf'(x)\big)$, défini sur $\mathscr{C}^1([0,1])$, pour la valeur propre λ. La famille $(\phi_\lambda)_{\lambda\geqslant 0}$ est donc libre.

Plus directement, soient $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\alpha_1\phi_{\lambda_1} + \alpha_2\phi_{\lambda_2} + \cdots + \alpha_n\phi_{\lambda_n} = 0_E$. Si les α_i ne sont pas tous nuls, soit $k = \max\{1 \leqslant i \leqslant n\,;\, \alpha_i \neq 0\}$. Alors,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_{\lambda_i}(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \phi_{\lambda_i}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha_k x^{\lambda_k} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \operatorname{sgn}(\alpha_k)\,\infty,$$

d'où une contradiction. Ainsi, les α_i sont tous nuls et la famille $\big(\phi_{\lambda_i}\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre. De là, la famille $(\phi_\lambda)_{\lambda\geqslant 0}$ est libre.

A. Déterminant de Cauchy

Soient $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ deux suites réelles finies avec $a_k + b_k \neq 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Pour $1 \leqslant m \leqslant n$, on pose $M_m = \left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ et $D_m = \det M_m$. Soit enfin la fraction rationnelle $R = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X - a_k) \times \prod_{k=1}^{n}(X - b_k)^{-1}$.

2) On suppose les b_k distincts deux à deux. Le dénominateur de la fraction rationnelle R est par hypothèse scindé à racines simples. Comme $\deg(R) < 0$, ellle se décompose donc en éléments simples sous la forme $R = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X + b_k}$. Alors,

$$\big(R(a_1) \quad R(a_2) \quad \cdots \quad R(a_n)\big)^\top = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{a_1 + b_k} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{a_2 + b_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{a_n + b_k}\right)^\top = \sum_{k=1}^{n} A_k C_k(M_n).$$

Notons $\widetilde{D_n}$ le déterminant de la matrice obtenue à partir de M_n en substituant $\big(0 \quad \cdots \quad 0 \quad R(a_n)\big)^\top$ à la dernière colonne. La linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne donne

$$\widetilde{D_n} = \sum_{k=1}^{n} A_k \det\big(C_1(M_n), \ldots, C_k(M_n), \ldots, C_{n-1}(M_n), C_k(M_n)\big) = \sum_{k=1}^{n} A_k \delta_{k,n} D_n = A_n D_n.$$

Par ailleurs, le calcul immédiat des $R(a_i)$ donne

$$\big(R(a_1) \quad R(a_2) \quad \cdots \quad R(a_n)\big)^\top = \big(0 \quad \cdots \quad 0 \quad R(a_n)\big)^\top \qquad \therefore \qquad \widetilde{D_n} = R(a_n) D_{n-1}$$

en développant par rapport à la dernière colonne, soit $A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$ par identification.

3) La question précédente donne une formule de récurrence. Par ailleurs, on connaît une expression explicite de la décomposition en éléments simples, dont les coefficients valent $A_k = R(X)(X + b_k)|_{X\leftarrow -b_k}$. On obtient ainsi la formule de récurrence

$$D_n = \frac{R(a_n)}{A_n} D_{n-1} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(a_n - a_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_n + b_k)} \times \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(-b_n + b_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(-b_n - a_k)} D_{n-1} = \frac{D_{n-1}}{a_n + b_n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(a_n - a_k)(b_n - b_k)}{(a_n + b_k)(b_n + a_k)}$$

Avec $D_1 = \dfrac{1}{a_1 + b_1}$, une récurrence immédiate sur n donne bien $D_n = \dfrac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i + b_j)}$. Notons que la formule s'étend au cas où la suite $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ n'est pas injective, le produit et le déterminant valant alors trivialement 0 (on peut aussi arguer de la continuité du déterminant).

B. Distance d'un point à une partie d'un espace normé.

On rappelle que, si $\left(E, \|\cdot\|\right)$ est un espace vectoriel normé, $x \in E$ et $A \subset E$, alors la distance de x à A est par définition $\mathrm{d}(x, A) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$.

4) On raisonne par équivalences en revenant à la définition. Soit $x \in E$. Alors,

$$\mathrm{d}(x, A) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A\colon \|x - a\| < \varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0\colon B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \iff x \in \overline{A}.$$

5) Notons que, si $A \subset B$, alors $\mathrm{d}(x, A) \geqslant \mathrm{d}(x, B)$. Soient alors $(A_n)_n$ une suite croissante de parties non vides de E et $A = \cup_{n \geqslant 0} A_n$ et $x \in E$. Comme $A_n \subset A$, on a $\mathrm{d}(x, A) \leqslant \mathrm{d}(x, A_n)$. De même, $\big(\mathrm{d}(x, A_n)\big)_n$ est une suite positive décroissante, donc convergente. Ainsi, $\mathrm{d}(x, A) \leqslant \lim \mathrm{d}(x, A_n)$. Si $y \in A$, alors $y \in A_{n_0}$ pour un certain entier n_0, donc $\|x - y\| \geqslant \mathrm{d}(x, A_{n_0}) \geqslant \lim \mathrm{d}(x, A_n)$. En considérant $(y_n)_n$ suite de A telle que $\lim \|x - y_n\| = \mathrm{d}(x, A)$, il vient $\mathrm{d}(x, A) \geqslant \lim \mathrm{d}(x, A_n)$, d'où l'égalité.

6) Pour $x \in E$, on note $B_x = \big\{y \in E \; ; \; \|y - x\| \leq \|x\|\big\} = \overline{B}(x, \|x\|\big)$. Cette partie de E est un boule fermée, donc elle est fermée et bornée. De plus, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé, donc $B_x \cap V$ est l'intersection de deux fermés, donc est fermé. Enfin, $B_x \cap V \subset B_x$ et toute partie incluse dans une partie bornée est bornée. Finalement, $B_x \cap V$ est une partie compacte de E.

Par ailleurs, $0_E \in B_x \cap V$, donc $\mathrm{d}(x, V) \leqslant \|x - 0_E\| = \|x\|$ et tout vecteur $y \in E$ tel que $\|x - y\| \leqslant \|x\|$ appartient à B_x, donc tout vecteur $y \in V$ tel que $\|x - y\| \leqslant \|x\|$ appartient à $B_x \cap V$. Ainsi, $\mathrm{d}(x, V) = \mathrm{d}(x, B_x \cap V)$.

7) L'application $y \longmapsto \|x - y\|$ définie sur le compact $B_x \cap V$ est continue et admet donc un minimum (avec le vocabulaire de PSI, une fonction définie sur une partie fermée et bornée d'un e.v.n. de dimension finie et à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes). Autrement dit, il existe $y \in V$ tel que $\mathrm{d}(x, V) = \|x - y\|$.

C. Distance d'un point à un s.e.v. de dimension finie dans un espace euclidien.

Dans cette partie, on suppose que E est une espace euclidien, la norme dérivant donc d'un produit scalaire $(\cdot \,|\, \cdot)$.

8) C'est une question de cours. Notons $p_V(x)$ la projection orthogonale de x sur V. Comme V est de dimension finie, on a $E = V \oplus V^\perp$ et le vecteur x se décompose en $x = p_V(x) + (x - p_V(x))$ avec, donc $x - p_V(x) \in V^\perp$. Soit $y \in V$. Alors, $x - y = x - p_V(x) + p_V(x) - y$ avec $x - p_V(x) \in V^\perp$ et $p_V(x) - y \in V$. Le théorème de Pythagore s'applique et donne

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_V(x)\|^2 + \|p_V(x) - y\|^2 \geqslant \|x - p_V(x)\|^2,$$

avec égalité si, et seulement si, $y = p_V(x)$.

9) Notons $V = \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Soit $A = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^n \simeq \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_i x_i \in V$. Alors, pour $M = M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$MA = \begin{pmatrix}(x_1 \,|\, x) & (x_2 \,|\, x) & \cdots & (x_n \,|\, x)\end{pmatrix}^\top \qquad \therefore \qquad A \in \mathrm{Ker}\, M \iff x \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\perp,$$

où il est entendu que l'orthogonal est l'orthogonal dans le sous-espace euclidien V muni du produit scalaire induit. Ainsi, M est inversible si, et seulement si, $\mathrm{Ker}\, M = \{0\}$ si, et seulement si, $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V$ si, et seulement si, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre. Par négation, $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ si, et seulement si, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée.

10) On suppose que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre. On note à nouveau $V = \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Soit $x \in E$.

— Si $x \in V^\perp$, alors

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n, x) = \mathrm{Diag}\left(M(x_1, x_2, \ldots, x_n), \|x\|^2\right) \qquad \therefore \qquad G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x) = G(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|x\|^2.$$

— Pour $(\alpha, i) \in \mathbb{R} \times [\![1, n]\!]$, $M(x_1, x_2, \ldots, x_n, x - \alpha x_i)$ est obtenue à partir de $M(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ par les deux transvections $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - \alpha C_i$ et $L_{n+1} \leftarrow L_n - \alpha L_i$. C'est clair, sauf pour le coefficient d'indice $(n+1, n+1)$, qui subit $\|x\|^2 \leftarrow \|x\|^2 - \alpha(x \,|\, x_i) - \alpha(x_i \,|\, x - \alpha x_i) = \|x - \alpha x_i\|^2$. Les transvections étant sans effet sur le déterminant, on a donc $G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x - \alpha x_i) = G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$.

— On peut conclure : pour $p_V(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$,

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x) = G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x - \alpha_1 x_1) = \cdots = G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x - p_V(x)) =$$

$$= G(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|x - p_V(x)\|^2 = \mathrm{d}(x, V)^2 \qquad \therefore \qquad \mathrm{d}(x, V)^2 = \frac{G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Autre rédaction. On rappelle que

$$\forall y \in V : (x \,|\, y) = \big(p_V(x) \,|\, y\big) + \big(\underbrace{x - p_V(x)}_{\in V^\perp} \,|\, y\big) = \big(p_V(x) \,|\, y\big).$$

On peut alors décomposer

$$G(x_1,x_2,\dots,x_n,x) = \left|\begin{array}{ccc|c} & & & (x_1 \,|\, x) \\ & M(x_1,x_2,\dots,x_n) & & \vdots \\ & & & (x_n \,|\, x) \\ \hline (x \,|\, x_1) & \cdots & (x \,|\, x_n) & \|x\|^2 \end{array}\right|$$

$$= \left|\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M(x_1,x_2,\dots,x_n) & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline (p_V(x) \,|\, x_1) & \cdots & (p_V(x) \,|\, x_n) & \|x - p_V(x)\|^2 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{ccc|c} & & & (x_1 \,|\, p_V(x)) \\ & M(x_1,x_2,\dots,x_n) & & \vdots \\ & & & (x_n \,|\, p_V(x)) \\ \hline (p_V(x) \,|\, x_1) & \cdots & (p_V(x) \,|\, x_n) & \|p_V(x)\|^2 \end{array}\right|$$

$$= G(x_1,x_2,\dots,x_n)\ \mathrm{d}(x,V)^2 + G\big(x_1,x_2,\dots,x_n,p_V(x)\big) = G(x_1,x_2,\dots,x_n)\ \mathrm{d}(x,V)^2$$

car $\big(x_1,x_2,\dots,x_n,p_V(x)\big)$ est liée.

D. Comparaison des normes $\mathbf{N_\infty}$ et $\mathbf{N_2}$.

11) Soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$. Alors,

$$N_2(f) = \left(\int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1 N_\infty(f)^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = N_\infty(f).$$

Toute suite d'éléments de $\mathscr{C}([0,1])$ de limite f au sens de N_∞ tend donc également vers la même fonction f au sens de N_2. Corrélativement, par caractérisation séquentielle de l'adhérence, $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$.

On note V_0 le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}([0,1])$ formé des fonctions de $\mathscr{C}([0,1])$ s'annulant en 0.

12) Rappelons que ϕ_0 est la fonction constante égale à 1. Posons f_n la fonction dont les restrictions aux intervalles $[0,2^{-n}]$ et à $[2^{-n},1]$ sont affines, qui vaut 0 en 0 et 1 sur $[2^{-n},1]$. Alors, $f_n \in V$ et

$$N_2(f_n - \phi_0) = \left(\int_0^{2^{-n}} (1-2^n t)^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3.2^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi, $\lim f_n = \phi_0$ au sens de N_2, donc $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$.

Autre construction possible (EP — calcul plus simple) : pour $g_n(x) = 1-(1-x)^n$, $(\phi_0 - g_n)(x) = (1-x)^n$, d'où $N_2(\phi_0 - g_n)^2 = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{2n}\,\mathrm{d}x$, soit $N_2(\phi_0 - g_n) = (2n+1)^{-1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

13) Il est facile d'adapter la construction précédente en substituant à ϕ_0 une fonction générique f de $\mathscr{C}([0,1])$ en considérant la suite $(f_n)_n \in V_0^{\mathbb{N}}$ telle que $f_{|[0,2^{-n}]}$ est affine et $f_{n|[2^{-n},1]} = f_{|[2^{-n},1]}$, mais l'énoncé semble suggérer d'utiliser la suite construite à la question précédente : notons pour commencer que $E = \mathrm{Vect}(\phi_0) \oplus V_0$. La somme est évidemment directe et toute fonction f de E peut se décomposer en $f = f(0)\phi_0 + (f - f(0)\phi_0)$, où l'on constate que $f - f(0)\phi_0 \in V$. En reprenant les notations de la question précédente, avec $\lim f_n = \phi_0$, soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$. Alors, f se décompose en $f = f(0)\phi_0 + v_0$ avec $v_0 \in V_0$, d'où $\lim f(0)f_n + v_0 = f$ au sens de N_2 avec $f(0)f_n + v_0 \in V_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $f \in V_0$, $N_\infty(f - \phi_0) \geqslant |f(1) - \phi_0(1)| = 1$, donc $\phi_0 \notin \overline{V_0}^2$, ce qui montre que V_0 n'est *a fortiori* pas dense dans E.

14) Soit V un sous-espace vectoriel d'un e.v.n. $\big(E, \|\cdot\|\big)$. Alors $\overline{V} \supset V$ est non vide. De plus, si $(f,g) \in \overline{V} \times \overline{V}$ et $f = \lim f_n$, $g = \lim g_n$ avec $(f_n, g_n) \in V^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, alors l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de la norme donnent

$$\|(\lambda f + \mu g) - (\lambda f_n + \mu g_n)\| \leqslant |\lambda| \|f - f_n\| + |\mu| \|g - g_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \therefore \qquad \lambda f + \mu g \in \overline{V}.$$

Cette question aurait pu être intervertie avec la précédente, qu'elle rend immédiate : en effet, V_0 est un hyperplan de $\mathscr{C}([0,1])$ et $\overline{V_0} \neq V_0$ d'après la question 12, donc V_0 est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$.

15) Notons $W = \mathrm{Vect}\{\phi_m\,;\ m \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $[0,1]$. Le théorème d'approximation de Weierstraß donne $\overline{W}^{\infty} = \mathscr{C}([0,1])$. Ainsi, si $\phi_m \in \overline{V}^{\infty}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, alors $W \subset \overline{V}^{\infty}$, d'où

$$\mathscr{C}([0,1]) = \overline{W}^{\infty} \subset \overline{\overline{V}^{\infty}}^{\infty} = \overline{V}^{\infty} \subset \mathscr{C}([0,1]) \qquad \therefore \qquad \overline{V}^{\infty} = \mathscr{C}([0,1]).$$

La réciproque est triviale : si $\overline{V}^{\infty} = \mathscr{C}([0,1])$, alors $\phi_m \in \overline{V}^{\infty}$, puisque $\phi_m \in \mathscr{C}([0,1])$.

16) La réciproque est la même que pour N_∞ : si $\overline{V}^2 = \mathscr{C}([0,1])$, alors $\phi_m \in \overline{V}^2$, puisque $\phi_m \in \mathscr{C}([0,1])$.

Supposons pour l'autre sens que $\phi_m \in \overline{V}^2$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Soient $f \in \mathscr{C}([0,1])$ et $\varepsilon > 0$. Alors, le théorème d'approximation de Weierstraß montre l'existence d'une fonction polynomiale P telle que $N_\infty(f-P) \leqslant \varepsilon$. Par hypothèse sur ϕ_m et le fait que $\overline{V}^2$ est un espace vectoriel en vertu de la question 14, $P \in \overline{V}^2$, d'où, par l'inégalité de la question 11,

$$N_2(f-P) \leqslant N_\infty(f-P) \leqslant \varepsilon,$$

ce qui montre bien que V est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ au sens de N_2.

E. Un critère de densité de W pour la norme $\mathbf{N_2}$.

On rappelle que $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs deux à deux distincts. On note W le sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ engendré par la famille $(\phi_{\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \mathrm{Vect}\big(\phi_{\lambda_k}\,;\ k \in [\![0,n]\!]\big)$.

17) Pour $\mu \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(\phi_\mu, W_n) \overset{(Q.5)}{=} \mathrm{d}(\phi_\mu, W) \qquad \& \qquad \mathrm{d}(\phi_\mu, W) = 0 \overset{(Q.4)}{\iff} \phi_\mu \in \overline{W}^2.$$

La condition exprime donc que toutes les fonctions ϕ_μ sont adhérentes à W, ce qui équivaut bien à $\overline{W}^2 = \mathscr{C}([0,1])$ par la question 16.

18) La question 10 donne $\mathrm{d}(\phi_\mu, W_n)^2 = \dfrac{G\big(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \dots \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu\big)}{G\big(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \dots \phi_{\lambda_n}\big)}$. Or, $G\big(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \dots \phi_{\lambda_n}\big)$ est le déterminant de la matrice $\left(\displaystyle\int_0^1 t^{\lambda_i} \times t^{\lambda_j}\,\mathrm{d}t\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n} = \left(\dfrac{1}{\lambda_i + \lambda_j + 1}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$, déterminant que l'on a calculé dans la partie A en prenant $a_k = b_k = \lambda_k + \dfrac{1}{2}$. On reprend donc le calcul fait à la question 3 — ce qui nous intéresse est, avec un décalage d'indice, le facteur $\dfrac{R(a_n)}{A_n}$ plus que l'expression de D_n. Il vient bien

$$\mathrm{d}(\phi_\mu, W_n)^2 = \frac{1}{2\mu+1} \prod_{k=0}^{n} \frac{(\mu-\lambda_k)^2}{(\mu+\lambda_k+1)^2} \qquad \therefore \qquad \mathrm{d}(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{|\mu-\lambda_k|}{\mu+\lambda_k+1}.$$

19) Pour $0 \leqslant x \leqslant \mu$, posons $q(x) = \dfrac{\mu - x}{x+\mu+1}$. La fonction q est une fonction dite *homographique* et est monotone sur tout intervalle où elle est définie, comme le montre dans ce cas particulier le calcul $q'(x) = -\dfrac{2\mu+1}{(x+\mu+1)^2} < 0$. Ainsi,

$$\forall x \in [0,\mu] \colon q(x) \leqslant q(0) = \frac{\mu}{\mu+1} < 1.$$

Ainsi, s'il existe une infinité de valeurs de k telles que $\lambda_k \leqslant \mu$, la suite $\left(\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right)_k$ ne peut pas tendre vers 1. Par contraposée, si cette suite tend vers 1 pour tout $\mu \geqslant 0$, alors $\#\{k \in \mathbb{N}\,;\ \lambda_k \leqslant \mu\}$ est fini, soit $\lim \lambda_k = +\infty$. La réciproque est évidente.

20) En préambule, notons que, si $\mu \in \{\lambda_k\,;\ k \in \mathbb{N}\}$, alors $\phi_\mu \in W$.

Posons $p_k = \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$. Comme $0 \leqslant p_k < 1$, la suite $\big(\mathrm{d}(\phi_\mu, W_n)\big)_n$ est décroissante et positive, donc convergente ; notons $\ell(\mu)$ sa limite.

Cas 1. Si $\neg(\lim \lambda_k = +\infty)$, il existe une constante $0 < a < 1$ et une suite d'entiers $(n_k)_k$ telle que $\lambda_{n_k} \leqslant a$, d'où $p_{n_k} \leqslant \dfrac{a}{a+1}$ et $\mathrm{d}(\phi_\mu, W_{n_k}) \leqslant \dfrac{a\,\mathrm{d}\big(\phi_\mu, W_{n_k+1}\big)}{a+1}$, soit $\ell(\mu) \leqslant \dfrac{a\ell(\mu)}{a+1}$ et, donc, $\ell(\mu) = 0$, ce qui montre par la question 16 que W est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ au sens de N_2. Par ailleurs, il est clair que la série $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ diverge.

Cas 2. Supposons maintenant que $\lim \lambda_k = +\infty$. Alors, pour tout $\mu \geqslant 0$, $\lambda_k \geqslant \mu$ à partir d'un certain rang, d'où

$$\ln(p_k) = \ln\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_k}\right) - \ln\left(1 + \frac{\mu+1}{\lambda_k}\right) \underset{k\to\infty}{\sim} -\frac{2\mu+1}{\lambda_k}.$$

Cas 2.1. Si $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ diverge, il en va de même de la série de terme général $\ln(p_k)$ par le théorème de comparaison.

Cas 2.1.1. Si $\mu \notin \{\lambda_k\,;\ k \in \mathbb{N}\}$, on a

$$\mathrm{d}(\phi_\mu, W_n) = -\frac{\ln(2\mu+1)}{2} + \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Cas 2.1.2. Si $\mu \in \{\lambda_k\,;\ k \in \mathbb{N}\}$, alors on a aussi $\mathrm{d}(\phi_\mu, W_n) = 0$.

Ainsi, la divergence de $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ entraîne que $\phi_{mu} \in \overline{W}^2$ pour tout $\mu \in \mathbb{N}$.

Cas 2.2. Si $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ converge, l'étude du cas 2.1. montre que la suite $\big(\mathrm{d}(\phi_\mu, W_n)\big)_n$ admet une limite finie non nulle par continuité de l'exponentielle pour tout $\mu \notin \{\lambda_k\,;\ k \in \mathbb{N}\}$.

Cas 2.2.1. Si $\mathbb{N} \not\subset \{\lambda_k\,;\ k \in \mathbb{N}\}$, il existe donc $\mu \in \mathbb{N}$ tel que $\lim \mathrm{d}(\phi_\mu, W_n) > 0$.

Cas 2.2.2. Si $\mathbb{N} \subset \{\lambda_k\,;\ k \in \mathbb{N}\}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe N tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\lambda_k} \geqslant \sum_{p=1}^{N+1} \frac{1}{p}$, donc $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ diverge, ce qui contredit l'hypothèse.

En appliquant pour conclure la question 17, on a bien prouvé l'équivalence entre la divergence de la série $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ et le fait que W soit dense dans $\mathscr{C}([0,1])$. Dans le cas $\lambda_k = k$, on retrouve bien le théorème d'approximation de Weierstraß. Notons que s'il existe k tel que $\lambda_k = 0$, ce k est nécessairement unique et la divergence de la série est à comprendre en excluant cet indice.

F. Un critère de densité de W pour la norme $\mathbf{N_\infty}$.

21) Si $\overline{W}^\infty = \mathscr{C}([0,1])$, alors $\overline{W}^2 = \mathscr{C}([0,1])$ d'après la question 11, donc $\sum \lambda_k^{-1}$ diverge d'après la question 20.

22) Soit $\psi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \phi_{\lambda_k} \in W_n$. Alors,

$$\forall x \in [0,1] \colon |\phi_\mu(x) - \psi(x)| = \left|\int_0^x \phi'_\mu(t) - \psi'(t)|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant N_1(\phi'_\mu - \psi') \leqslant N_2(\phi'_\mu - \psi'),$$

la majoration par N_2 venant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La relation $\phi'_\lambda = \lambda\phi_{\lambda-1}$ donne alors le résultat.

23) Posons $\lambda'_k = \lambda_k - 1$. Alors, la suite $(\lambda'_k)_{k\geqslant 1}$ est positive et injective. Si $(\lambda_k)_{k\geqslant 0}$ ne tend pas vers l'infini, ce n'est pas non plus le cas de $(\lambda'_k)_{k\geqslant 1}$, donc $\sum \dfrac{1}{\lambda'_k}$ diverge grossièrement. Si $(\lambda_k)_{k\geqslant 0}$ tend vers l'infini, alors $\dfrac{1}{\lambda'_k} \sim \dfrac{1}{\lambda_k}$, donc $\sum \dfrac{1}{\lambda'_k}$ diverge. On peut donc appliquer la question 20 à $(\lambda'_k)_{k\geqslant 1}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \mu \geqslant 1, \exists p \in \mathbb{N}^*, \exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p \colon N_2\left(\phi_{\mu-1} - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \phi_{\lambda'_k}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{\mu} \quad \therefore \quad N_\infty\left(\phi_\mu - \sum_{k=1}^{p} \frac{\mu\alpha_k}{\lambda_k}\phi_{\lambda_k}\right) \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, $\phi_\mu \in \overline{W}^\infty$ pour tout $\mu \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse, c'est aussi vrai de ϕ_0.

24) On ne suppose plus que $\lambda_k \geqslant 1$ pour tout $k \geqslant 1$, mais seulement que $\delta = \inf\limits_{k\geqslant 1} \lambda_k > 0$. Posons cette fois $\lambda'_k = \lambda_k/\delta$. Cette suite vérifie les hypothèses de la question 23. Soit alors $f \in \mathscr{C}([0,1])$. Pour $x \in [0,1]$, posons

$g(x) = f\left(x^{1/\delta}\right)$. Alors, $g \in \mathscr{C}([0,1])$, donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}^*, \exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p, \forall x \in [0,1] \colon \left| g(x) - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \phi_{\lambda'_k}(x) \right| = \left| f\left(x^{1/\delta}\right) - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \phi_{\lambda_k}\left(x^{1/\delta}\right) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Comme $x \mapsto x^{1/\delta}$ réalise une bijection de $[0,1]$ sur lui-même, $\left\| g - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \phi_{\lambda'_k} \right\|_\infty = \left\| f - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \phi_{\lambda_k} \right\|_\infty$, ce qui montre que $\overline{W}^\infty = \mathscr{C}([0,1])$.