# Convergence dominée, applications aux intégrales à paramètre

## 1. Cas de la convergence uniforme sur un segment

La convergence dominée n'est pas considérée comme un mode de convergence, mais comme une condition suffisante très efficace permettant de passer à la limite sous l'intégrale. Rappelons un résultat vu dans le chapitre sur les modes de convergence d'une suite de fonctions avant d'énoncer le théorème de convergence dominée proprement dit.

**Théorème 1.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues convergent uniformément vers $f$ sur $I$ et un segment $[a,b] \subset I$. Alors, $f$ est continue et*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

C'est ce théorème qui sert à prouver que l'on peut intégrer une série entière terme à terme sur tout segment $[a,b]$ avec $-R < a < b < R$, où $R$ est le RCV de la série entière. Il s'applique aussi à une suite de fonctions continues par morceaux à condition de vérifier que la limite l'est aussi, ce qui n'est plus systématique comme sous l'hypothèse de continuité.

## 2. Théorème de convergence dominée

### 2.1. Énoncé du théorème de convergence dominée.

**Théorème 2.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle $I$ convergeant simplement vers une fonction $f$ continue par morceaux. On suppose qu'il existe $h\colon I \to \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathring{I}$, $|f_n(x)| \leqslant h(x)$ (domination). Alors, $f$ est intégrable sur $I$ et*

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

— L'hypothèse de domination est fondamentale. Il suffit qu'elle soit vérifiée à.p.c.r. (c'est-à-dire pour tout couple $(n,x) \in [\![n_0,+\infty[\![\times I$ pour un certain entier $n_0$). Elle entraîne l'intégrabilité des fonctions $f_n$ sur $I$ par comparaison, ce qui dispense de vérifier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
— Il faut vérifier que $f$ est continue par morceaux car cela n'est pas automatique par passage à la limite simple (ni même uniforme si l'intervalle n'est pas borné). En pratique, il suffira de le mentionner car ce sera évident sur les fonctions explicites que l'on étudiera.
— Le théorème 1 peut être vu comme un corollaire du théorème 2. Ce n'est pas une raison pour l'oublier. En effet, exhiber une fonction de domination $h$ n'est pas toujours facile, alors que, selon le contexte, l'application du théorème 1 peut être immédiate.

**Corollaire 1.** *Sous les hypothèses du théorème de convergence dominée, on a convergence dans $\mathcal{L}^1(I)$, i.e.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \Big|f_n(x) - f(x)\Big|\,\mathrm{d}x = 0.$$

Noter que l'on peut déduire le théorème 2 du corollaire en utilisant l'inégalité classique

$$\left|\int_I f(x)\,\mathrm{d}x - \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_I \Big|f_n(x) - f(x)\Big|\,\mathrm{d}x.$$

On obtient ainsi aussi la conclusion du théorème de convergence dominée avec une domination $|f_n - f| \leqslant h$ valable pour tout $n \geqslant n_0$.

### 2.2. Exemples de calculs de limites de suites d'intégrales.

**Exemple 1.** Déterminer $\lim I_n$, avec $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan x)^n\,\mathrm{d}x$. Pour $x \in [0,\pi/4[$, on a $0 \leqslant \tan x < 1$. Donc la suite $(\tan^n x)_n$ converge simplement vers la fonction nulle. Par ailleurs, $0 \leqslant \tan^n x \leqslant 1$ pour tout $n$ et pour tout $x$, et 1 est intégrable sur l'intervalle borné $[0,\pi/4[$. Le théorème de convergence dominée s'applique et $\lim I_n = 0$.

**Exemple 2.** Soit à calculer $\lim I_n$ avec $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+nx}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x = \int_{]0,+\infty[} \frac{1+nx}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x$. L'intégrale est bien définie pour $n \geqslant 3$ et la suite de fonctions sous l'intégrale converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$ par croissance comparées. Pour dominer, il y a plusieurs solutions. La première consiste à majorer en traitant séparément les soucis de convergence aux voisinages respectifs de 0 et de $+\infty$, ce qui constitue une technique classique de domination (à l'œuvre dans l'étude de la fonction $\Gamma$ (exercice incontournable), par exemple) :

$$\begin{aligned}\frac{1+nx}{(1+x)^n} &= \frac{1+nx}{1+nx+\binom{n}{2}x^2+\cdots+x^n} \leqslant 1 \qquad \text{(majoration pertinente sur } [0,1])\\ &= \frac{1}{(1+x)^n}+\frac{nx}{(1+x)^n} \leqslant \frac{1}{(1+x)^2}+\frac{nx}{\binom{n}{3}x^3} \underset{(n\geqslant 4)}{\leqslant} \frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{x^2} \leqslant \frac{2}{x^2} \qquad \text{(majoration pertinente sur } [1,+\infty[)\\ &\leqslant \mathbb{1}_{]0,1]}(x)+\frac{2}{x^2}\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x) = h(x).\end{aligned}$$

On peut alternativement utiliser la relation de Chasles et écrire $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1+nx}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x$ en dominant par 1 pour la première intégrale et par $2/x^2$ pour la deuxième. C'est en fait exactement la même preuve, juste rédigée différemment. La deuxième solution consiste à vérifier que $0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$, d'où $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_3(x)$ pour tout $n \geqslant 3$. Dans les deux cas, on a trouvé une fonction de domination intégrable et le théorème de CVD donne $\lim I_n = 0$.

**Exemple 3.** Soit à calculer $\lim I_n$ avec $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos x\,\mathrm{d}x$. *A priori*, on ne peut pas appliquer le théorème car l'intervalle d'intégration change avec $n$. Pour y remédier, on pose $f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n (\cos x)\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$. On peut alors écrire $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. En passant à l'exponentielle, on obtient $f(x) = \lim f_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos x$. De plus,

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left[n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right] \leqslant \exp(-x) \quad \text{par } \ln(1+u)\leqslant u;$$

on peut ainsi prendre comme fonction de domination $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$, qui est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2.3. **Exemples de recherche d'équivalents de suites d'intégrales.** Le théorème de convergence dominée peut également s'appliquer à la recherche d'équivalents. Ainsi, pour montrer que $I_n = \displaystyle\int_I f_n$ vérifie $I_n \sim c\lambda(n)$ avec $\lambda$ une fonction usuelle et $c$ une constante, on applique le théorème de CVD à $J_n = \displaystyle\int_I g_n$ et $g_n = \dfrac{f_n}{\lambda(n)}$ pour obtenir $\lim J_n = c$.

**Exemple 4.** Soient $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$. Déterminer $\lim I_n$, puis un équivalent de $I_n$ dans le cas où $f(0)\neq 0$. Le théorème de CVD s'applique avec $h(t) = \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-t}$ et donne $\lim I_n = 0$. Pour déterminer un équivalent de $I_n$, on effectue le changement de variable $x = nt$, ce qui donne $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}J_n$. On peut appliquer le théorème de CVD à $J_n$ avec la même fonction $h$, et l'on obtient

$$I_n \sim \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} f(0)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{f(0)}{n}.$$

Extension : si $f(0) = \cdots = f^{(p-1)}(0) = 0$ et $f^{(p)}(0)\neq 0$, la formule de Taylor-Young donne $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}t^p$, d'où (après calcul) $I_n \sim \dfrac{f^{(p)}(0)}{n^{p+1}}$.

**Exemple 5** (Intégrales de Wallis)**.** Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x$. Déterminer $\lim I_n$, puis un équivalent de $I_n$ (faire le changement de variable $t = x\sqrt{n}$).

Le théorème de CVD s'applique immédiatement pour montrer que $\lim I_n = 0$ en dominant par 1 et en mentionnant que $\lim \cos^n x = 0$ pour tout $x \in ]0,\pi/2]$. Trouver un équivalent est plus délicat. Le changement de variable suggéré donne

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\pi\sqrt{n}/2} \cos^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,\pi\sqrt{n}/2]}(t)\cos^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}}J_n.$$

En passant à l'exponentielle, il vient

$$\cos^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left[n\ln\left(1-\frac{t^2}{2n}+\mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = \exp\big(-t^2/2+\mathfrak{o}(1)\big),$$

d'où la convergence simple de la fonction intégrée par $J_n$ vers $\mathrm{e}^{-t^2/2}$. Pour la domination, on écrit

$$\cos^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left[n\ln\left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)\right] = \exp\left[n\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right)\right)\right] \overset{(1)}{\leqslant} \exp\left[-2n\sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right)\right] \overset{(2)}{\leqslant} \mathrm{e}^{-2t^2/\pi^2} = h(t),$$

en utilisant les inégalités de convexité (1) $\ln(1+u) \leqslant u$, valable pour tout $u \geqslant -1$ et (2) $\frac{2}{\pi} u \leqslant \sin u$, valable pour tout $0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$.
Comme $h$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de convergence dominée s'applique et l'on obtient finalement l'équivalent $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ en utilisant la valeur de l'intégrale de Gauß. C'est une alternative au calcul classique de l'intégrale par i.p.p. suivie de l'application de la formule de Stirling.

Une façon différente de dominer la fonction est de chercher une domination sous la forme $\mathrm{e}^{-ct^2}$, cette forme, avec une constante $c > 0$ à déterminer, étant suggérée par le calcul de la limite simple. On pose donc $\varphi(u) = cu^2 + \ln(\cos u)$, et l'on cherche $c$ telle que $\varphi(u) \leqslant 0$ pour tout $0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$. Or, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(u) = 2cu - \tan u$. L'inégalité $\varphi(u) \leqslant 0$ est vérifiée si $\varphi$ est décroissante, ce qui est le cas pour $c \leqslant 1/2$. La meilleure valeur de $c$ possible est donc $c = 1/2$, qui donne une domination meilleure que celle obtenue à l'aide des formules de trigonométrie, soit $h(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$.

### 2.4. **Applications aux séries de fonctions.**

2.4.1. *Énoncé.* Le théorème de convergence dominée s'adapte à une série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ :

*Si $u_n \colon I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est continue par morceaux, alors les sommes partielles $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(t)$ le sont également. Si la série $\sum u_n$ converge simplement et s'il existe une domination intégrable $h$, c'est-à-dire une fonction $h \colon I \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $t \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S_n(t)| \leqslant h(t)$, alors la série des intégrales converge et l'on a*

$$\int_I \left( \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_I u_k(t) \, \mathrm{d}t \right).$$

De manière plus générale, la linéarité de l'intégrale donne, sous la double hypothèse de convergence simple de la série de fonctions $\sum u_k(t)$ et de convergence de la série numérique $\sum \int_I u_k(t) \, \mathrm{d}t$,

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon \int_I \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \, \mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{\infty} \int_I u_k(t) \, \mathrm{d}t = \int_I \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(t) \, \mathrm{d}t - \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_I u_k(t) \, \mathrm{d}t,$$

ce qui donne la proposition évidente (au sens où elle n'utilise que la linéarité de l'intégrale, mais utile dans le cas des séries alternées) suivante :

**Proposition 1.** *Pour une série de fonctions simplement convergente $\sum u_k(t)$, si la série $\sum \int_I u_k(t) \, \mathrm{d}t$ converge, alors, pour $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(t)$, on a*

$$\int_I \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_I u_k(t) \, \mathrm{d}t \iff \lim_{n \to \infty} \int_I R_n(t) \, \mathrm{d}t = 0.$$

2.4.2. *Cas des fonctions positives.* La plus petite fonction de domination possible est $h(t) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(t)|$.

Si $u_k(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in I$ et tout $k \in \mathbb{N}$, alors $h(t) = \lim_{n \to \infty} S_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$. Il suffit donc de vérifier que la somme de la série est intégrable. Si elle ne l'est pas, le théorème de convergence dominée ne s'applique pas.

**Exemple 6.** Soit à montrer l'identité $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$. On développe l'intégrande en série positive à partir du DSE $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$ avec $u = \mathrm{e}^{-2x} < 1$ ; on calcule les intégrales obtenues, puis la somme de la série.

$$\frac{x}{\operatorname{sh} x} = \frac{2x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \frac{2x\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-2x}} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} x\mathrm{e}^{-(2n+1)x},$$

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(2n+1)x} \, \mathrm{d}x = \left[ -\frac{x}{2n+1} \mathrm{e}^{-(2n+1)x} \right]_0^{x \to +\infty} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2n+1)x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\zeta(2)}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \therefore \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3\zeta(2)}{4} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On obtient donc bien le résultat à condition de démontrer la convergence de l'intégrale de départ (*i.e.* l'intégrabilité de la domination). Or, $x \longmapsto \dfrac{x}{\operatorname{sh} x}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 (par la valeur 1) et

$$\frac{x}{\operatorname{sh} x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x\mathrm{e}^{-x} = 2x\mathrm{e}^{-x/2}\mathrm{e}^{-x/2} = \mathfrak{o}\big(\mathrm{e}^{-x/2}\big).$$

2.4.3. *Cas des séries absolument convergentes.* Pour une série de fonctions $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ absolument convergente, une domination évidente des sommes partielles est $h(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |u_k(t)|$. La situation est moins confortable que pour une série de fonctions positives car $h$ n'est pas la meilleure domination possible ; si elle est intégrable, le théorème de CVD s'applique, mais si elle ne l'est pas, rien ne dit qu'une domination mieux choisie ne ferait pas l'affaire.

**Exemple 7.** Soit à montrer l'identité $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

On substitue $u = -x^2 < 1$ dans le DSE $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u^n$, ce qui donne $\dfrac{(\ln x)^2}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\ln x)^2x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$. Deux i.p.p. sucessives permettent de se débarrasser de $(\ln x)^2$ par dérivation et donnent $\displaystyle\int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{2}{(2n+1)^3}$. Pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée, on montre que

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)| = \sum_{n=0}^{\infty}(\ln x)^2x^{2n} = \frac{(\ln x)^2}{1-x^2}$$

est intégrable sur $]0,1[$. Elle est continue sur cet intervalle. Son intégrabilité est donnée par une étude aux bornes :

$$h(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\sim} (\ln x)^2 = \sqrt{x}(\ln x)^2 \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \mathfrak{o}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \qquad \& \qquad h(x) = \frac{\ln\big(1-(1-x)\big)^2}{(1-x)(1+x)} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1-x}{2},$$

d'où la convergence en 0 par comparaison et en 1 par prolongement par continuité (par la valeur 0).

2.4.4. *Cas des séries alternées semi-convergentes.* Rappelons que l'on appelle *semi-convergente* une série convergente, mais pas absolument convergente. Dans ce cas, la série $\sum |u_k(t)|$ diverge et ne constitue donc pas une domination crédible. Le critère spécial des séries alternées propose une alternative. En effet, pour $N \in \mathbb{N}$, si l'on pose $v_k^{(N)} = u_k$ si $k \leqslant N$ et $v_k^{(N)} = 0$ si $k > N$, la série $\sum v_k^{(N)}(t)$ vérifie aussi, à $t$ et $N$ fixés, les hypothèses du C.S.S.A. et l'on a en particulier

$$\left|\sum_{k=0}^{N}(-1)^k u_k(t)\right| = \left|\sum_{k=0}^{N}(-1)^k v_k^{(N)}(t)\right| \leqslant \left|v_0^{(N)}(t)\right| = |u_0(t)|.$$

On peut donc prendre $u_0$ comme fonction de domination — à condition de vérifier son intégrabilité. Si la suite de fonctions $\big(|u_k|\big)_k$ n'est décroissante qu'à partir d'un rang $n_0$, on isole la somme partielle des $n_0$ premiers termes et l'on domine les sommes partielles de $\displaystyle\sum_{k\geqslant n_0} u_k$ par $|u_{n_0}|$.

**Exemple 8.** Soit à montrer, pour tout réel $\alpha > 0$, l'identité $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+\alpha}$.

Le DSE de $\dfrac{1}{1+x}$ et un calcul d'intégrale immédiat assurent que, pour tout $x \in [0,1[$,

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = x^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{k+\alpha-1} \qquad \& \qquad \forall k\in\mathbb{N}\colon \int_0^1 x^{k+\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+\alpha},$$

l'hypothèse $\alpha > 0$ justifiant la convergence des intégrales. Il suffit donc de justifier la permutation de l'intégrale et de la somme. La série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{k+\alpha-1}$ est absolument convergente, mais $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\alpha-1} = \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{1-x}$ n'est pas intégrable (divergence en 1). On ne peut donc pas appliquer la domination prévue au paragraphe 2.4.3. Mais on peut quand même appliquer le théorème de convergence dominée grâce au C.S.S.A., ou bien en utilisant la proposition 1 et en majorant le reste de la série :

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k x^{k+\alpha-1}\right| \leqslant x^{n+\alpha} \quad \therefore \quad \left|\int_0^1 R_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{n+\alpha+1},$$

ou bien, plus directement, comme expliqué au début de ce paragraphe, par la domination intégrable $\left|\sum_{k=0}^{N}(-1)^k x^{k+\alpha-1}\right| \leqslant x^{\alpha-1}$.
Notons que l'on peut aussi utiliser la convergence uniforme. Il n'y a pas convergence uniforme sur $[0,1]$, mais, si $0<a<1$, on a $\left\|(-1)^k x^{k+\alpha-1}\right\|_{[0,a],\,\infty} = a^{k+\alpha-1}$, d'où convergence normale, donc uniforme sur $[0,a]$. On a donc, en intégrant terme à terme en vertu du théorème 1,

$$\forall a \in [0,1[\colon\ f(a) = \int_0^a \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} a^k = g(a).$$

Par convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$, la fonction $f$ est continue en 1. La majoration par $\dfrac{1}{n+\alpha}$ du reste de la série alternée dont $g(a)$ est la somme, qui est indépendante de $a$, montre la convergence uniforme de la série sur $[0,1]$, d'où la continuité de $g$ en 1. On peut alors prendre $a=1$ dans la formule en vertu du théorème de la double limite.

## 3. Théorème d'interversion série-intégrale dans le cas absolument convergent

Si $\sum u_k$ est absolument convergente, on dispose d'un théorème supplémentaire.

**Théorème 3.** *Soit $(u_k)_k$ une suite de fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle $I$ telle que $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge simplement vers une fonction $S$, continue par morceaux sur $I$. Si $\sum \int_I |u_k(t)|\,\mathrm{d}t$ est une série convergente, alors $S$ est intégrable sur $I$ et l'on a*

$$\int_I \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_I u_k(t)\,\mathrm{d}t.$$

Bien que cela ne fasse pas partie du théorème tel qu'énoncé par le programme, les hypothèses entraînent que la série $\sum_{k\geqslant 0} |u_k|$ converge et que sa somme (si elle est continue par morceaux), est intégrable. En fait, l'hypothèse de convergence de la série de fonctions est inutile car elle est impliquée (ce n'est pas évident, mais c'est vrai) par l'hypothèse de convergence de la série numérique. En revanche, rien ne garantit en général la continuité par morceaux de la somme.

3.1. **Cas des fonctions positives.** Soit $S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ une série de fonctions convergeant simplement vers une fonction continue par morceaux sur $I$ avec $u_k(t) \geqslant 0$ pour tout $t\in I$ et tout $k\in\mathbb{N}$. Pour pouvoir appliquer le théorème 3, il faut que $\sum \int_I |u_k(t)|\,\mathrm{d}t = \sum \int_I u_k(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Autrement dit, il suffit de prouver la convergence de la série du terme de droite. Ainsi, dans l'exemple 6, on mentionne simplement la convergence de la série de Riemann $\sum n^{-2}$. On peut faire la synthèse du cas des séries de fonctions positives : sous l'hypothèse de convergence simple de la série vers une fonction continue par morceaux, il suffit, pour justifier l'interversion $\int_I \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_I u_k(t)\,\mathrm{d}t$, de montrer que l'un des deux membres converge, l'intégrale (convergence dominée) ou la série (théorème d'interversion).

3.2. **Cas des séries absolument convergentes.** L'emploi du théorème 3 peut nécessiter de nouveaux calculs. Soit à montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. On développe la fonction intégrée en série par $\dfrac{\sin t}{\mathrm{e}^t-1} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sin t)\mathrm{e}^{-mt}$. Il faut alors montrer la convergence de la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin t|\mathrm{e}^{-mt}\,\mathrm{d}t$. La majoration du sinus par 1 donne $\dfrac{1}{m}$, terme général de la série harmonique, qui diverge. Mais la majoration

$$\int_0^{+\infty} |\sin t|\mathrm{e}^{-mt}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-mt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{m^2}$$

permet d'appliquer le théorème 3. Noter qu'il y a essentiellement deux majorations classiques de $|\sin t|$ : par $|t|$ et par 1. La première est utile pour des valeurs de $t$ proches de 0 et la deuxième pour de grands intervalles. Il se passe ici quelque chose de particulier : on est sur un grand intervalle, avec des valeurs de $t$ arbitrairement grandes pour lesquelles la majoration par $t$ est *a priori* inepte... sauf que l'exponentielle au dénominateur concentre la masse autour des petites valeurs de $t$ et que la majoration par 1 fait diverger l'intégrale en 0, d'où le choix de la majoration par $t$. En cas de besoin, on pourrait aussi pu écrire $|\sin t| \leqslant t\mathbb{1}_{[0,\pi]}(t) + \mathbb{1}_{]\pi,+\infty[}(t)$, majoration valable sur $\mathbb{R}_+$ et qui ménage la chèvre et le chou.

Ce théorème peut aussi être plus facile à appliquer que le théorème de CVD. Ainsi, dans l'exemple 7, on a $\int_0^1 |u_n(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x\right|$ il est plus rapide de montrer la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}$ que de justifier la convergence de l'intégrale.

## 4. Intégrales à paramètre

4.1. **Quand les bornes varient.** Ce cas n'est pas l'objectif du paragraphe. Rappelons toutefois le résultat.

**Proposition 2.** *1. Si $f$ est continue par morceaux sur $I$ et $x_0 \in I$, posons $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors, $F$ est continue sur $I$. De plus, $F$ est dérivable en $x \in I$ si, et seulement si, $\lim\limits_{\substack{t\to x\\ t\neq x}} f(t)$ existe et est finie. En ce cas, on a $F'(x) = \lim\limits_{\substack{t\to x\\ t\neq x}} f(t)$. En particulier, si $f$ est continue en $x$, alors $F$ est dérivable en $x$ et $F'(x) = f(x)$.*
*2. Par dérivation des fonctions composées, si $u$ et $v$ sont dérivables et si $f$ est continue, alors la fonction $H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et $H'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.*

4.2. **Continuité des intégrales à paramètre.**

**Définition 1.** *Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $f\colon I\times J \to \mathbb{R}$ et $F\colon x \longmapsto \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$. On dit qu'une fonction $h\colon \mathring{J} \to \mathbb{R}_+$ domine $f$ sur $I' \subset I$ si $h$ est continue par morceaux et si $|f(x,t)| \leqslant h(t)$ pour tout $(x,t) \in I' \times \mathring{J}$.*

**Théorème 4.** Théorème de convergence dominée à paramètre continu. *Soient $(x,t) \longmapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I \times J$, $g\colon I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a$ une borne de $I$. Si :*
*i) pour tout $t \in \mathring{J}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x,t) = g(t)$ ;*
*ii) pour tout $x \in I$, les fonctions $t \longmapsto f(x,t)$ et $g$ sont continues par morceaux sur $\mathring{J}$ ;*
*iii) il existe une fonction intégrable $h\colon I \to \mathbb{R}_+$ telle que $|f(x,t)| \leqslant h(t)$ pour tout $(x,t) \in I \times \mathring{J}$,*
*alors, $g$ est intégrable sur $I$ et l'on a $\lim\limits_{x\to a}\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.*

**Théorème 5.** Théorème de continuité. *Si :*
*i) pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathring{J}$ ;*
*ii) pour tout $t \in \mathring{J}$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur $I$ ;*
*iii) il existe une fonction intégrable $h\colon I \to \mathbb{R}_+$ telle que $|f(x,t)| \leqslant h(t)$ pour tout $(x,t) \in I \times \mathring{J}$,*
*alors, la fonction $F$ est bien définie et continue sur $I$.*

**Exemple 9.** Étude de $F\colon \theta \longmapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos\theta\cos t}$. L'intégrale définissant $F(\theta)$ est impropre si, et seulement si le dénominateur peut s'annuler, ce que arrive uniquement pour $(\theta,t) = ((2k+1)\pi, 0)$. Par ailleurs, pour $\cos\theta = -1$, on a $\frac{1}{1+\cos\theta\cos t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{2}{t^2}$, ce qui donne une intégrale divergente. Par périodicité, on peut donc considérer la fonction $F$ sur $]-\pi,\pi[$. Sur $]-\pi,\pi[\times[0,\pi/2]$, les fonctions $t \longmapsto \frac{1}{1+\cos\theta\cos t}$ et $\theta \longmapsto \frac{1}{1+\cos\theta\cos t}$ sont respectivement continue p.m. et continue. On ne peut pas dominer la fonction sur tout l'intervalle, mais, si $0<\delta<\pi$, on a

$$(\theta,t) \in [-\pi+\delta, \pi-\delta]\times[0,\pi/2] \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{1+\cos\theta\cos t} \leqslant \frac{1}{1-\cos\delta}.$$

Toute fonction constante étant intégrable sur un segment, on a bien une domination. Le thérorème 5 assure que $F$ est continue sur $[-\pi+\delta, \pi-\delta]$. Cela valant pour tout $\delta \in ]0,\pi[$ (en fait, pour $\delta$ arbitrairement petit), $F$ est continue sur $]-\pi,\pi[$.

**Remarque 1.** L'exemple 9 illustre plusieurs idées utiles :
— Sur un intervalle d'intégration borné, dominer par une constante est suffisant. Ce n'est pas toujours possible.
— Le théorème ne donne pas que la continuité de $F$, mais aussi le fait que, pour tout $x \in I$, l'intégrale définissant $F$ est absolument convergente, donc convergente.
— Il est souvent impossible de dominer la fonction sur $I$, mais la continuité (comme le caractère $\mathcal{C}^1$) étant des propriétés locales, il suffit d'appliquer le théorème sur un segment arbitraire inclus dans $I$.

4.3. **Dérivation des intégrales à paramètre.**

**Théorème 6.** *Si :*

*i) pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\overset{\circ}{J}$ ;*
*ii) pour tout $t \in \overset{\circ}{J}$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ ;*
*iii) pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\overset{\circ}{J}$ ;*
*iv) il existe une fonction intégrable $h\colon \overset{\circ}{J} \to \mathbb{R}_+$ dominant $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|$ sur $I \times \overset{\circ}{J}$ ;*

*alors, la fonction $F$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et, pour tout $x \in I$, l'on a*

$$F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

**Exemple 10.** Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $F$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ; calculer $F$.

i) Pour $x > 0$, la fonction $t \longmapsto \operatorname{sinc}(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 (par la valeur 1) et $\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-xt})$ quand $t$ tend vers $+\infty$. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$, à $x > 0$ fixé.
ii) Pour tout $t > 0$, la fonction $x \longmapsto \operatorname{sinc}(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
iii) Pour tout $x > 0$, la fonction

$$t \longmapsto \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{sinc}(t)\mathrm{e}^{-xt} = -(\sin t)\mathrm{e}^{-xt}$$

est continue (p.m.) sur $]0,+\infty[$.
iv) Pour $0 < a \leqslant x < +\infty$, on a $|-(\sin t)\mathrm{e}^{-xt}| \leqslant \mathrm{e}^{-at}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}$ converge. On peut donc appliquer le théorème 6, qui assure que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = -\int_0^\infty (\sin t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = -\operatorname{Im}\int_0^\infty \mathrm{e}^{it}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = -\operatorname{Im}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x-i)t}\,\mathrm{d}t = -\operatorname{Im}\left(\frac{1}{x-i}\right) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

On en déduit que $F(x) = F(0) + \displaystyle\int_0^x F'(t)\,\mathrm{d}t = F(0) - \arctan(x)$. Il est clair que $\operatorname{sinc}(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est dominée par la fonction intégrable $\mathrm{e}^{-t}$ pour tout $x \geqslant 1$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sinc}(t)\mathrm{e}^{-xt} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. On peut alors appliquer le théorème 4, qui donne $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$, d'où $C = \dfrac{\pi}{2}$, d'où $F(x) = \arctan(1/x)$.

**Exemple 11** (Mines)**.** Montrer que la fonction $F\colon x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)t^x}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition. En donner une expression non intégrale.

L'étude de la nature de l'intégrale est à la fois standard (cas particulier des intégrales de Bertrand) et un peu délicate. La fonction $t \longmapsto \dfrac{(1-t)t^x}{\ln t}$ est continue (p.m.) sur $]0,1[$. Quand $t$ tend vers 1, on a $\ln t = \ln\big(1-(1-t)\big) \sim 1-t$, d'où $\displaystyle\lim_{\substack{t\to1\\t<1}} \frac{(1-t)t^x}{\ln t} = 1$, donc l'intégrale est faussement impropre en 1, et ce, pour toute valeur de $x$. Quand $t$ tend vers 0, on a $\dfrac{(1-t)t^x}{\ln t} \sim \dfrac{t^x}{\ln t}$. La valeur seuil de $x$ est $x = -1$. En utilisant qu'à $t \in ]0,1[$ fixé, $x \longmapsto t^x = \exp(x\ln t)$ est décroissante, on écrit :

— si $x \leqslant -1$, on a $\left|\dfrac{t^x}{\ln t}\right| \geqslant \dfrac{1}{t|\ln t|} = -\dfrac{1}{t\ln t}$. Or, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \ln|\ln t| + C$, qui admet une limite infinie quand $t$ tend vers 0, d'où la divergence de l'intégrale.

— si $x > -1$, $\dfrac{t^x}{\ln t} = \mathfrak{o}(t^x)$ quand $t$ tend vers 0, donc l'intégrale converge. Finalement, le domaine de définition de $F$ est $]-1,+\infty[$.

On applique maintenant le théorème 6. Le i) vient d'être traité et le ii) et le iii) sont évidents. Enfin, pour $x \geqslant a > -1$ : $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{(1-t)t^x}{\ln t}\right) = (1-t)t^x \leqslant t^x \leqslant t^a$, d'où le caractère $\mathcal{C}^1$ de $F$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > -1$, donc sur $]-1,+\infty[$. De plus,

$$F'(x) = \int_0^1 (t^x - t^{x+1})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} \qquad \therefore \quad F(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + C.$$

Pour trouver la valeur de la constante $C$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et la caractérisation séquentielle de la limite et faire tendre $x$ vers l'infini (la domination a déjà été faite). Il vient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$, d'où $C = 0$.

**Remarque 2.** — Il n'est pas rare que la dérivation donne une intégrale plus simple et permette de calculer $F$ en passant par le calcul de $F'$.

— Quand on a déjà appliqué le théorème de continuité, l'intégrabilité exigée au i) est donnée par la domination de $f(x,t)$ effectuée alors. En revanche, comme c'est une dérivée partielle que l'on domine dans le théorème de dérivation, il faut bien traiter le i) si l'on applique directement le théorème 6.
— Le remarque relative au passage par un segment quelconque inclus dans $I$ pour la domination est tout aussi utile pour le théorème 6 que pour le théorème 5.

4.4. **Dérivations successives.** Il est évident, en raisonnant par récurrence et en appliquant le théorème 6, que l'on obtient une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ en vérifiant l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ et les hypothèses de régularité et dominant toutes les dérivées partielles. Le théorème fondamental du calcul intégral et l'essence locale du caractère $\mathcal{C}^p$ permettent de réduire ces hypothèses.

**Théorème 7.** *Si :*
*i) pour tout $t \in \mathring{J}$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ ;*
*ii) pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ et tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $J$ ;*
*iii) pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$ et tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur $\mathring{J}$ ;*
*iv) il existe une fonction intégrable $h_n \colon \mathring{J} \to \mathbb{R}_+$ dominant $\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right|$ sur $I \times \mathring{J}$ ;*
*alors, la fonction $F$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ et, pour tout $x \in I$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, l'on a*

$$F^{(k)}(x) = \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

**Remarque 3.** On peut utiliser la dérivation pour étudier la convexité, mais c'est maladroit : la croissance et la linéarité de l'intégrale suffisent pour vérifier que si, pour tout $t \in J$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est convexe (resp. concave), il en va de même pour la fonction $F$ qu'elle définit. Les variations de $F$ peuvent elles aussi, à l'occasion, s'étudier sans dériver sous l'intégrale.

Pour dériver une infinité de fois, on raisonne comme dans le cas des suites de fonctions.

**Théorème 8.** *On suppose que :*
*i) pour tout $t \in \mathring{J}$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$ ;*
*ii) pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $J$ ;*
*iii) il existe un entier $n_0$ tel que*
*$\alpha$) pour tout $k \in [\![0,n_0-1]\!]$ et tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur $\mathring{J}$ ;*
*$\beta$) pour tout $k \in [\![n_0,+\infty[\![$, il existe une fonction intégrable $h_k \colon \mathring{J} \to \mathbb{R}_+$ dominant $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|$ sur $I \times \mathring{J}$.*
*Alors, la fonction $F$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$ et, pour tout $x \in I$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$F^{(k)}(x) = \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

**Exemple 12.** La fonction $F(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(xt)}{\mathrm{e}^x + t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On note que la fonction $(x,t) \longmapsto \dfrac{\cos(xt)}{x+t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times [0,\pi]$, donc sur tout fermé-borné du type $[a,b] \times [0,\pi]$. Ainsi, toutes les dérivées partielles sont bornées et l'on peut prendre $h_{k,[a,b]}(t) = \left\|\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\dfrac{\cos(xt)}{\mathrm{e}^x+t}\right)\right\|_{\infty,[a,b]}$, fonction constante, donc intégrable sur $[0,\pi]$. Toutes les hypothèses sont ainsi vérifiées d'un seul coup.

**Exemple 13.** La fonction $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On calcule

$$f_k(t) = \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\right) = (-1)^k(1-\cos t)t^{k/2-2}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}.$$

Pour $k \geqslant 3$, on peut, pour $x \in [a,+\infty[$, dominer la dérivée ci-dessus par $2t^{k/2-2}\mathrm{e}^{-a\sqrt{t}}$, fonction intégrable. Pour $k \in \{0,1,2\}$, il suffit de mentionner que $f_k(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathfrak{o}(\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}/2})$ et que $f_k(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{k/2}/2$, donc que l'intégrale, à $x$ fixé, est faussement impropre en 0. Cela assure l'intégrabilité pour ces trois valeurs de $k$.

Il est également possible de dominer $f_k$ pour $k \leqslant 2$, mais il faut travailler un peu plus pour cela et utiliser (donc prouver) l'inégalité globale $0 \leqslant 1-\cos u \leqslant \dfrac{u^2}{2}$, ce qui permet de prendre $h_k(t) = \mathrm{e}^{-a\sqrt{t}}$.