DM4 - PSI* - 2025-2026

On note E l'ensemble des fonctions continues $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ qui vérifient la propriété suivante :

$$(P):\quad \text{pour tout } x>0,\ \text{la fonction } t \longmapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-xt} \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[.$$

Pour toute fonction $f \in E$, la *transformée de Laplace* de f est la fonction $\mathcal{L}(f)$ définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x \in]0,+\infty[: \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

A. Exemples

1. Démontrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{F}\big(]0,+\infty[,\mathbb{C}\big)$ des fonctions de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{C}$.

2. Pour $a \in \mathbb{C}$, on pose $f_a\colon t \longmapsto \mathrm{e}^{-at}$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $f_a \in E$ et montrer qu'alors, $\mathcal{L}(f_a)(x) = \dfrac{1}{a+x}$ pour tout $x>0$.

3. Soient $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la fonction g_n définie par $g_n(t) = t^n f(t)$ appartient encore à E.

4. Démontrer que toute fonction polynomiale appartient à E. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la transformée de Laplace de la fonction p_n définie par $p_n(t) = t^n$.

5. Démontrer que la fonction sinus appartient à E et calculer sa transformée de Laplace. On pourra utiliser la question 2.

B. Régularité et limites

6. Démontrer que, pour toute fonction $f \in E$, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.

7. Démontrer que, pour toute fonction $f \in E$, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[: \big(\mathcal{L}(f)\big)^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

Retrouver la valeur de $\mathcal{L}(p_n)$ obtenue à la question 4.

8. Soit $f \in E$. On suppose dans cette question que f est bornée, de classe $\mathscr{C}^1$ et que $f' \in E$. Montrer que

$$\forall x \in]0,+\infty[: \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$

En déduire le *théorème de la valeur initiale* : sous les hypothèses faites, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

9. On suppose dans cette question que $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et admet une limite finie $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

a. Montrer que $f \in E$.

b. Grâce à un changement de variable, montrer que

$$\forall x \in]0,+\infty[: x\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

c. En déduire le *théorème de la valeur finale* : sous les hypothèses faites, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

C. Transformée de Laplace du sinus cardinal et de son carré

On rappelle la définition du *sinus cardinal* $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ prolongé par continuité en 0 par la valeur 1. On note S sa primitive s'annulant en 0, soit $S(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sinc}(t)\,\mathrm{d}t$.

10. Montrer que la fonction sinc est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Montrer l'existence et déterminer la valeur de $\|\operatorname{sinc}\|_\infty$. En déduire que $\operatorname{sinc} \in E$. On note $L = \mathcal{L}(\operatorname{sinc})$ sa transformée de Laplace.

11. En utilisant les questions 5 et 7, calculer $L'(x)$ pour $x > 0$. En déduire une expression simple (non intégrale) de $L(x)$ pour $x > 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $G(x) = \mathcal{L}(\operatorname{sinc}^2)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}^2(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$, qui est bien définie pour $x > 0$ d'après la question 9.a.

12. Montrer que $L(0) = G(0)$ (et, en particulier, que les intégrales sont bien définies).

13. Montrer que, pour $x > 0$, $L(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} S\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$. En déduire que L est continue en 0 et calculer enfin $L(0)$.

14. *Calcul de G.*

a. Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que G est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer explicitement $G''(x)$ pour $x \neq 0$.

c. En déduire une expression non intégrale de G, ainsi qu'un nouveau calcul de $L(0)$.

D. Injectivité de la transformation de Laplace

On admet le théorème de Stone-Weierstraß : *toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.*

Soit $f \in E$. On note g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(s) = \displaystyle\int_0^s f(u)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$.

15. En utilisant la question 9, montrer que

$$\forall x \in]0, +\infty[: \mathcal{L}(g)(x) = \frac{1}{x}\mathcal{L}(f)(x+1).$$

16. Pour $u \in]0, 1]$, on pose $\phi(u) = g(-\ln u)$. Montrer que

$$\forall x \in]0, +\infty[: \mathcal{L}(g)(x) = \int_0^1 \phi(u)u^{x-1}\,\mathrm{d}u$$

On suppose dans la suite de cette partie que $\mathcal{L}(f)$ est la fonction nulle.

17. Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $\displaystyle\int_0^1 \phi(u)P(u)\,\mathrm{d}u = 0$.

18. Justifier l'existence d'une suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ convergeant uniformément sur $]0, 1]$ vers ϕ.

19. Démontrer que ϕ est la fonction nulle, puis que f est la fonction nulle.

E. Un développement asymptotique

Dans cette partie, on pose, pour $x > 0$, $W(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x\,\mathrm{d}t$ (intégrale de Wallis). On rappelle la valeur de l'intégrale de Gauß $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

20. Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. En déduire celle de $t \longmapsto \sqrt{t}$.

21. Par un changement de variable, montrer que $W(x) = \mathcal{L}(f)$ avec $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}}$.

22. Montrer que, quand t tend vers 0, on a $\mathrm{e}^{-2t} = 1 - 2t + 2t^2 + \mathfrak{o}\big(t^{5/2}\big)$. En déduire l'existence d'une fonction ε bornée sur $[0, +\infty[$ telle que

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2t}} - \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{2}} + t\,\varepsilon(t).$$

23. Montrer que, quand x tend vers $+\infty$,

$$W(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}\,\frac{1}{x\sqrt{x}} + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).$$