DM4 - PSI* - Corrigé - 2025-2026

On note E l'ensemble des fonctions continues $f\colon [0,+\infty[\to\mathbb{C}$ qui vérifient la propriété suivante :

$$(P):\quad \text{pour tout } x>0,\ \text{la fonction } t\longmapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-xt} \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[.$$

Pour toute fonction $f\in E$, la *transformée de Laplace* de f est la fonction $\mathcal{L}(f)$ définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x\in]0,+\infty[\colon \mathcal{L}(f)(x)=\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

A. Exemples

1. *Version longue.* Il est clair que la fonction nulle appartient à E. Soient $f,g\in E$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$. Alors la fonction $\lambda f+\mu g$ est continue sur $[0,+\infty[$; de plus, pour tout $x>0$, les fonctions $t\longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ et $t\mapsto g(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$, donc la fonction

$$t\longmapsto (\lambda f(t)+\mu g(t))\mathrm{e}^{-xt}=\lambda f(t)\mathrm{e}^{-xt}+\mu g(t)\mathrm{e}^{-xt}$$

est intégrable sur $[0,+\infty[$ comme combinaison linéaire de fonctions intégrables. Ainsi, $\lambda f+\mu g\in E$; donc E est bien un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Enfin, pour tout $x>0$, on a

$$\mathcal{L}(\lambda f+\mu g)(x)=\int_0^{+\infty}(\lambda f(t)+\mu g(t))\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\lambda\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t+\mu\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\lambda\mathcal{L}(f)(x)+\mu\mathcal{L}(g)(x),$$

donc $\mathcal{L}(\lambda f+\mu g)=\lambda\mathcal{L}(f)+\mu\mathcal{L}(g)$. Finalement, $\mathcal{L}$ est bien une application linéaire.

Version courte. Pour $x\in\mathbb{C}$, soit m_x l'opérateur défini sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}\big([0,+\infty[,\mathbb{C}\big)$ des fonctions complexes continues définies sur $\mathbb{R}_+$ par $m_x(f)=t\longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$. Les applications m_x sont trivialement linéaires et $E=\displaystyle\bigcap_{x>0} m_x^{-1}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)\big)$ est un espace vectoriel comme intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathscr{C}\big([0,+\infty[,\mathbb{C}\big)$. L'application $\mathcal{L}$ est linéaire sur E par linéarité de l'intégrale.

2. Soient $a\in\mathbb{C}$ et $f_a\colon t\longmapsto \mathrm{e}^{-at}$. On sait que f_a est intégrable si, et seulement si $\mathrm{Re}(a)>0$. Soit $x\in\mathbb{R}$. Comme $t\longmapsto f_a(t)\mathrm{e}^{-xt}=f_{a-x}$ et $\mathrm{Re}(a-x)=\mathrm{Re}(a)-x$, il s'ensuit que $f_a\in E$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}(a)\geqslant 0$. Alors, pour tout $x>0$,

$$\mathcal{L}(f_a)(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{\mathrm{e}^{-(x+a)t}}{-(x+a)}\right]_0^{t\to+\infty}=\frac{1}{x+a},$$

donc $f_a\in E$ et $\mathcal{L}(f_a)(x)=\dfrac{1}{x+a}$.

3. Soient $f\in E$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $g_n(t)=t^nf(t)$. La fonction g_n est bien continue sur $\mathbb{R}_+$. Soit alors $x>0$; posons $x'=x/2$. Il vient

$$g_n(t)\mathrm{e}^{-xt}=f(t)\mathrm{e}^{-x't}\times t^n\mathrm{e}^{-x't}\underset{(t\to+\infty)}{=}\mathfrak{o}\big(f(t)\mathrm{e}^{-x't}\big),$$

donc $g_n\in E$ par le théorème de comparaison.

4. La fonction $p_0=f_0=1$ appartient à E. D'après la question 3, c'est aussi le cas de p_n pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc de toute fonction polynomiale par linéarité. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(p_{n+1})(x)&=\int_0^{+\infty}\underbrace{t^{n+1}}_{u}\times\underbrace{\mathrm{e}^{-xt}}_{v'}\,\mathrm{d}t=\left[t^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{-x}\right]_0^{t\to+\infty}+\int_0^{+\infty}(n+1)t^n\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}t\\&=0+\frac{n+1}{x}\int_0^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{n+1}{x}\mathcal{L}(p_n)(x),\end{aligned}$$

la convergence du crochet justifiant la validité de l'intégration par parties. Par une récurrence immédiate, il vient

$$\forall n\in\mathbb{N}\colon \mathcal{L}(p_n)(x)=\frac{n}{x}\mathcal{L}(p_{n-1})(x)=\frac{n!}{x^n}\mathcal{L}(p_0)(x)=\frac{n!}{x^{n+1}}.$$

5. *Transformée de Laplace de la fonction sinus.*
D'après la question 2, pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{L}(\sin)(x) = \mathcal{L}(\mathrm{Im}(f_{-\mathrm{i}}))(x) = \mathrm{Im}\left(\mathcal{L}(f_{-\mathrm{i}})(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{x+\mathrm{i}}{|x-\mathrm{i}|^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}.\right.$$

B. Régularité et limites

6. Si $x > 0$, la fonction $t \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et $x \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $a > 0$ et $x \in [a, +\infty[$, on a la domination $|f(t)\mathrm{e}^{-xt}| \leqslant |f(t)|\mathrm{e}^{-at}$, intégrable par l'hypothèse (P). Il s'ensuit :

— que l'on peut appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre sur $[a, +\infty[$ et que $\mathcal{L}(f)$ est ainsi continue sur cet intervalle. Cela valant pour tout $a > 0$ et la continuité étant une propriété locale, $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

— que le théorème de convergence dominée à paramètre continu s'applique et donne

$$\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

7. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique. Pour $f \in E$,
— la fonction $x \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ pour tout $t \geqslant 0$;
— les fonctions

$$t \longmapsto \frac{\partial^n}{\partial x^n}\big(f(t)\mathrm{e}^{-xt}\big) = (-1)^n t^n f(t)\mathrm{e}^{-xt}$$

sont continues (p.m.) et dominées par $g_n(t)\mathrm{e}^{-at}$ pour $a > 0$ et $x \in [a, +\infty[$, fonctions intégrables en vertu de la question 3. Il s'ensuit que $\mathcal{L}(f)$ est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0, +\infty[: \big(\mathcal{L}(f)\big)^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

Autrement dit, $\mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}\big(t \to t^n f(t)\big)$. On peut utiliser cette formule pour retrouver l'expression de la transformé de Laplace de la fonction p_n :

$$\mathcal{L}(p_n)(x) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n}\big(\mathcal{L}(p_0)\big) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

8. Soit $f \in E$. On suppose que f est bornée, de classe $\mathscr{C}^1$ et que $f' \in E$. Soit $x > 0$. Une intégration par parties donne

$$\mathcal{L}(f')(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{f'(t)}_{u'} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-xt}}_{v}\,\mathrm{d}t = \big[f(t)\mathrm{e}^{-xt}\big]_0^{t\to+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)(-x\mathrm{e}^{-xt})\,\mathrm{d}t = -f(0) + x\mathcal{L}(f)(x).$$

De fait, l'intégrale de départ existe par l'hypothèse $f' \in E$ et le fait que f soit bornée assure que, dans le crochet, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt} = 0$. On en déduit le *théorème de la valeur initiale* en appliquant à f' le résultat prouvé à la question 6 : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

9. On suppose que $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et admet une limite finie $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

a. Il s'ensuit que $f(t)\mathrm{e}^{-xt} = \mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{-xt}\big)$ quand t tend vers l'infini pour tout ℓ (si $\ell = 0$, on a même $f(t)\mathrm{e}^{-xt} = \mathfrak{o}\big(\mathrm{e}^{-xt}\big)$, mais ce n'est pas utile). Le théorème de comparaison permet de conclure que f vérifie la propriété (P), donc, f étant supposée continue sur $\mathbb{R}_+$, que $f \in E$.

b. Soit $x \in]0, +\infty[$. Le changement de variable $u = xt$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même et donne

$$x\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

c. Comme f est continue et admet une limite finie en l'infini, elle est bornée sur $\mathbb{R}_+$. on peut alors dominer $g(u, x) = f\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{e}^{-u}$ par $\|f\|_\infty \mathrm{e}^{-u}$, qui est intégrable. De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(u, x) = \ell\mathrm{e}^{-u}$. Le théorème de convergence dominée à paramètre continu donne alors le *théorème de la valeur finale* : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\mathcal{L}(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ell e^{-u}\,\mathrm{d}u = \ell.$

Notons que l'on peut aussi retrouver, à partir de la même expression intégrale le théorème de la valeur initiale sans avoir besoin de supposer f de classe $\mathscr{C}^1$ en faisant tendre x vers $+\infty$ (avec, donc, f continue bornée).

C. Transformée de Laplace du sinus cardinal

On rappelle la définition du *sinus cardinal* $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ prolongé par continuité en 0 par la valeur 1. On note S sa primitive s'annulant en 0, soit $S(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sinc}(t)\,\mathrm{d}t$.

10. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\operatorname{sinc} x = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$. Par continuité du sinus cardinal et de la série entière, la formule vaut aussi pour $x = 0$. Ainsi, sinc est développable en série entière avec un rayon de convergence infini, donc la fonction sinc est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Le sinus cardinal est continu et de limite nulle en l'infini, donc borné et admet donc une norme infinie. L'inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$ montre que $\|\operatorname{sinc}\|_\infty \leqslant 1$, mais l'inégalité est en fait une égalité car $\operatorname{sinc}(0) = 1$. Enfin, $\operatorname{sinc} \in E$ par la question 9.a. On note $L = \mathcal{L}(\operatorname{sinc})$ sa transformée de Laplace.

11. Comme $\operatorname{sinc} \in E$, les questions 7 et 5 donnent

$$\forall x > 0 \colon L'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = -\mathcal{L}(\sin)(x) = -\frac{1}{1+x^2} \qquad \therefore \qquad L(x) = c - \arctan x,$$

où $c \in \mathbb{R}$. D'après la question 6, $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x) = 0$, d'où $c = \dfrac{\pi}{2}$ et $L(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

12. On pose $G(x) = \mathcal{L}(\operatorname{sinc}^2)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}^2(t)\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t$. On sait que L et G sont bien définies sur $\mathbb{R}_+^*$.
Réalisons une intégration par parties à partir de $L(0)$.

$$L(0) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\sin x}_{u'} \times \overbrace{\frac{1}{x}}^{v}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_{x\to 0}^{x\to+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}\,\mathrm{d}x \underset{(x=2u)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,\mathrm{d}x = G(0).$$

Le crochet donne deux fois 0 car

$$\frac{1-\cos x}{x} \underset{(x\to+\infty)}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \& \qquad \frac{1-\cos x}{x} \underset{(x\to 0)}{\sim} \frac{x}{2}$$

et un changement de variable bijectif conserve la nature de l'intégrale. Il s'ensuit que les deux intégrales sont de même nature, donc convergentes car l'intégrale définissant $G(0)$ est faussement impropre en 0 (la fonction est prolongeable par continuité en 0 par la valeur $1/2$) et par comparaison avec $1/u^2$ en l'infini.

13. Pour $x > 0$, on peut écrire :

$$\int_0^{+\infty} S\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u}\,\mathrm{d}u \overset{(1)}{=} x\mathcal{L}(S)(x) \overset{(2)}{=} \mathcal{L}(S')(x) + S(0) = \mathcal{L}(\operatorname{sinc})(x) + 0 = L(x).$$

(1) La fonction S est continue comme primitive d'une fonction continue et qu'elle admet une limite finie en $+\infty$ d'après la question 12 (convergence de $L(0)$). On peut donc lui appliquer la question 9.b ;
(2) $S' \in E$ par la question 10 ; on peut donc lui appliquer la question 8.

On applique alors le théorème de la valeur finale à S, qui vérifie bien les hypothèses de la question 9, pour passer à la limite :

$$L(x) = x\mathcal{L}(S)(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} \lim_{y\to+\infty} S(y) = \int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(t)\,\mathrm{d}t = L(0).$$

Ainsi, $L(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} L(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

14.a. On applique le théorème de continuité (dire que $\operatorname{sinc}^2 \in E$ ne donne pas la continuité en 0).

(i) Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \longmapsto \operatorname{sinc}^2(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est continue (p.m.) sur $]0, +\infty[$.

(ii) Pour tout $t > 0$, la fonction $x \longmapsto \operatorname{sinc}(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(iii) Pour tout $x \geqslant 0$, on a la domination intégrable $\left|\operatorname{sinc}^2(t)\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant \operatorname{sinc}^2(t)$. Or, sinc^2 est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\operatorname{sinc}^2 t \underset{t\to\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^2)$, donc sinc^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (ce qui n'est pas le cas des fonctions de E, d'où l'obligation de se placer sur $[a, +\infty[$ à la question 6.

Le théorème s'applique donc directement sur $\mathbb{R}_+$ et donne la continuité de G sur $\mathbb{R}_+$.

14.b. La fonction sinc^2 est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$ et appartient donc à E. La question 8 assure qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (on ne pouvait pas utiliser cette question pour la continuité car on n'aurait obtenu que la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ et non sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\begin{aligned} G''(x) &= \int_0^{+\infty} \sin^2 t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\right)^2 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \left[\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\right]\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x-2\mathrm{i}} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2\mathrm{i}}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4}\right). \end{aligned}$$

14.c. La question est assez pénible... Par intégration, il vient

$$G'(x) = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) + C_1 = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+4} + C_1.$$

Or, $G'(x) = -\mathcal{L}\big(t \mapsto t\operatorname{sinc}^2(t)\big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par la question 6, d'où $C_1 = 0$. Pour calculer G, on primitive $\ln(x^2+4)$ par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2+4)\,\mathrm{d}x &= \int \underbrace{\ln(x^2+4)}_{u} \times \underbrace{1}_{v'}\,\mathrm{d}x = x\ln(x^2+4) - \int \frac{2x^2}{x^2+4}\,\mathrm{d}x \\ &= x\ln(x^2+4) - \int \frac{2x^2+8-8}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = x\ln(x^2+4) - 2x + 4\arctan\frac{x}{2} + C \qquad \therefore \\ G(x) &= \frac{1}{2}(x\ln x - x) - \frac{x}{4}\ln(x^2+4) + \frac{x}{2} - \arctan\frac{x}{2} + C_0 \\ &= \frac{1}{2}x\ln x - \frac{x}{2}\ln x - \frac{x}{4}\ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) - \arctan\frac{x}{2} + C_0 = -\frac{x}{4}\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) - \arctan\frac{x}{2} + C_0 \\ &\underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2} + C_0 = C_0 - \frac{\pi}{2} + \mathfrak{o}(1). \end{aligned}$$

À nouveau, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$, et l'on en déduit $C_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Enfin, la continuité de G en 0, prouvée à la question 14.b., donne, en remontant à la première expression de G à la troisième ligne du calcul ci-dessus,

$$G(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} G(x) = C_0 = \frac{\pi}{2}.$$

D. Injectivité de la transformation de Laplace

On admet le théorème de Stone-Weierstraß : *toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.*

Soit $f \in E$. On note g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(s) = \displaystyle\int_0^s f(u)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$.

15. Soit $x \in]0, +\infty[$. La question 9 donne $\mathcal{L}(g')(x) = x\mathcal{L}(g)(x) - g(0)$, d'où

$$\mathcal{L}(g)(x) = \frac{1}{x}\big(\mathcal{L}(g')(x) + g(0)\big) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-u}\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathcal{L}(f)(x+1).$$

16. Pour $u \in]0,1]$, on pose $\phi(u) = g(-\ln u)$. En posant $t = -\ln u$ ($u = \mathrm{e}^{-t}$) dans l'intégrale, il vient, pour $x > 0$,

$$\mathcal{L}(g)(x) = \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_1^0 g(-\ln u)u^x\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u}\right) = \int_0^1 \phi(u)u^{x-1}\,\mathrm{d}u.$$

17. Par hypothèse, $\mathcal{L}(f)$ est la fonction nulle. Pour $n \in \mathbb{N}$, les questions 15 et 16 donnent

$$\int_0^1 \phi(u)u^n\,\mathrm{d}u = \mathcal{L}(g)(n+1) = \frac{1}{n+1}\mathcal{L}(f)(n+2) = 0.$$

Par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \phi(u)P(u)\,\mathrm{d}u = 0$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

18. La fonction ϕ est continue sur $]0,1]$ et

$$\lim_{u\to 0}\phi(u) = \lim_{u\to 0} g(-\ln u) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \mathcal{L}(f)(1).$$

Ainsi, ϕ est prolongeable par continuité en 0. Notons $\widetilde{\phi}$ le prolongement. On peut appliquer à $\widetilde{\phi}$ le théorème de Stone-Weierstraß. Il existe ainsi une suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ convergeant uniformément sur $[0,1]$ vers $\widetilde{\phi}$, donc sur $]0,1]$ vers ϕ par restriction.

19. Pour $x \in]0,1]$, on a

$$\left|\phi(x)P_n(x) - \phi^2(x)\right| = |\phi(x)| \times \left|P_n(x) - \phi(x)\right| \leqslant \|\phi\|_\infty \|P_n - \phi\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, la suite $(\phi P_n)_n$ converge uniformément vers ϕ^2, d'où $\displaystyle\int_0^1 \phi^2(u)\,\mathrm{d}u = \lim \int_0^1 \phi(u)P_n(u)\,\mathrm{d}u = 0$. Comme ϕ est continue, c'est la fonction nulle. Corrélativement, g est aussi la fonction nulle, donc $f(s)\mathrm{e}^{-s} = g'(s) = 0$ et f est la fonction nulle, ce qui montre l'injectivité de la transformée de Laplace.

E. Un développement asymptotique

20. La fonction $1/\sqrt{t}$ n'est pas continue en 0, mais on peut toujours écrire la formule donnant sa transformée de Laplace... Pour $x > 0$, effectuons le changement de variable $xt = u^2$

$$\mathcal{L}\left(t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}\right)(x) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{u}\sqrt{x} \times \frac{2u\,\mathrm{d}u}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{x}},$$

$$\mathcal{L}\big(t \mapsto \sqrt{t}\big)(x) = \int_0^\infty \underbrace{\sqrt{t}}_{u} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-xt}}_{v'}\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{t}\,\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{-x}\right]_0^{t\to+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{-2x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}\mathcal{L}\left(t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}\right)(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,x^{3/2}}.$$

21. On a $W(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{x\ln(\sin t)}\,dt$, ce qui conduit à faire le changement de variable $u = -\ln(\sin t)$, ou encore $t = \arcsin(\mathrm{e}^{-u})$, changement de variable continu et strictement monotone. En posant $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}}$, on en déduit

$$W(x) = \int_0^{\pi/2} e^{x\ln(\sin t)}\,\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^0 \mathrm{e}^{-xu}\left(-\frac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{1-e^{-2u}}}\right)\mathrm{d}u = \mathcal{L}(f)(x).$$

22. D'après la formule de Taylor-Young, on a, pour t tendant vers 0,

$$\mathrm{e}^{-2t} = 1 - 2t + \frac{4t^2}{2} + \mathcal{O}(t^3) = 1 - 2t + 2t^2 + \mathfrak{o}(t^{5/2}),$$

ce qui se réécrit sous la forme $1 - \mathrm{e}^{-2t} = 2t\big(1 - t + \mathfrak{o}(t^{3/2})\big)$. En reportant dans $(1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{u}{2} + \mathfrak{o}(u)$ pour u tendant vers 0, il vient

$$(1-\mathrm{e}^{-2t})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2t}}\left(1 - t + \mathfrak{o}(t^{3/2})\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2t}}\left(1 + \frac{t}{2} + \mathfrak{o}(t^{3/2}) + \mathfrak{o}(t^{3/2})\right) = \frac{1}{\sqrt{2t}}\left(1 + \frac{t}{2} + \mathfrak{o}(t^{3/2})\right).$$

En multipliant par $\mathrm{e}^{-t} = 1 - t + \dfrac{t^2}{2} + \mathfrak{o}(t^2) = 1 - t + \mathfrak{o}(t^{3/2})$, on obtient

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2t}}\left(1 + \frac{t}{2} + \mathfrak{o}(t^{3/2})\right)\left(1 - t + \mathfrak{o}(t^{3/2})\right) = \frac{1}{\sqrt{2t}}\left(1 - \frac{t}{2} + \mathfrak{o}(t^{3/2})\right) = \frac{1}{\sqrt{2t}} - \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{2}} + \mathfrak{o}(t).$$

On peut classiquement écrire le reste $\mathfrak{o}(t)$ du développement précédent sous la forme $t\varepsilon(t)$ avec ε de limite nulle en 0.

23. La linéarité de la transformée de Laplace (question 1) et les calculs de la question 20 donnent, à partir de l'expression de f de la question précédente,

$$\begin{aligned} W(x) = \mathcal{L}(f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}\left(t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}\right)(x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathcal{L}\big(t \mapsto \sqrt{t}\big)(x) + \mathcal{L}\big(t \mapsto t\varepsilon(t)\big)(x) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}\,\frac{1}{x\sqrt{x}} + \mathcal{L}\big(t \mapsto t\varepsilon(t)\big)(x) \end{aligned}$$

Pour $t > 0$, le développement asymptotique de f donne

$$\varepsilon(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}} - \frac{1}{t\sqrt{2t}} + \frac{1}{2\sqrt{2t}}.$$

La fonction ε est donc de limite nulle en 0 et en l'infini. Étant continue, elle est bornée. Notons $M = \|t \mapsto t\varepsilon(t)\|_\infty$. Il vient

$$\left|\int_0^\infty t\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^\infty |\varepsilon(t)|t\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = M\mathcal{L}(p_1)(x) = \frac{M}{x^2} \qquad \therefore$$

$$W(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}\,\frac{1}{x\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$