DMS 5 - PSI* — 2025 - 2026

Problème

Partie I — Introduction d'une fonction auxiliaire

Soit l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I\colon f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et, par convention, $f^{(0)} = f$.

I.A. Dérivées successives

On veut montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que

$$(\mathfrak{P})\colon \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I\colon f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

1. Calculer les dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ et expliciter les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3.

2. Montrer la propriété $(\mathfrak{P})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et de P_n'.

3. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le polynôme P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.

4. Montrer que $2f'(x) = f(x)^2 + 1$ pour tout $x \in I$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.

5. Montrer que $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

I.B. Développement en série entière

On note R le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ et g sa somme.

6. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi/2[\,: \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \leqslant f(x).$$

7. En déduire la minoration $R \geqslant \frac{\pi}{2}$.

8. Montrer que, pour tout $x \in I$, on a $2g'(x) = g(x)^2 + 1$.

9. En considérant les fonctions $\arctan f$ et $\arctan g$, montrer que, pour tout $x \in I$, $f(x) = g(x)$.

10. En déduire que $R = \frac{\pi}{2}$.

I.C. Partie paire et partie impaire du développement en série entière

11. Justifier que toute fonction $h\colon I \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $h = p + i$ avec $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction paire et $i : I \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.

12. En déduire que

$$\forall x \in I\colon\ \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \& \qquad \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

13. Pour tout entier naturel n, exprimer $\tan^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

14. Rappeler, sans justification, l'expression de $\tan'$ en fonction de tan.

15. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\colon \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1}\alpha_{2n-2k+1}.$$

Partie II — Une recherche d'équivalent

II.A. La fonction zêta de Riemann

Pour tout $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

16. Montrer que ζ est bien définie et continue sur $]1, +\infty[$.

17. Montrer que $\lim\limits_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$. En utilisant la comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $\zeta(s)$ quand s tend vers 1 par valeurs supérieures.

18. Déterminer une fonction $C(s)$ à l'expression simple telle que

$$\forall s \in]1, +\infty[\colon \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = C(s)\zeta(s).$$

II.B - Une formule pour la fonction cosinus

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2xt)(\cos t)^n \,\mathrm{d}t$.

19. Montrer que I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $I_n'(x) = -2\displaystyle\int_0^{\pi/2} t\sin(2xt)(\cos t)^n \,\mathrm{d}t$. En déduire que

$$\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \forall x \in \mathbb{R}\colon \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x) \quad \& \quad \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) \frac{I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}.$$

20. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}\colon \sin(\pi x) = \pi x \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

21. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, 1[\colon \cos(\pi x) = \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)} \frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)} \prod_{p=1}^{n} \left(1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right).$$

II.C. Un autre développement de tangente

Dans toute cette sous-partie II.C, on pose $J = [0, 1/2[$ et, pour tout entier naturel n et tout réel x de J,

$$S_n(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2^{2p+1} x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}} \right).$$

22. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall s \in]1, +\infty[\colon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} \leqslant \frac{1}{2(s-1)} \frac{1}{(2n-1)^{s-1}}.$$

23. Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction S_n est définie sur J.

24. Montrer que la suite $(S_n)_n$ converge simplement sur J vers la fonction nulle.

25. En dérivant $x \mapsto \ln(\cos(\pi x))$, montrer que

$$\forall x \in J\colon \pi \tan(\pi x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{8x}{(2k-1)^2} \frac{1}{1 - \dfrac{4x^2}{(2k-1)^2}}.$$

26. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in J\colon \pi \tan(\pi x) + S_n(x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + 2\sum_{p=1}^{+\infty}(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}.$$

27. Montrer l'inégalité $t\cos t \leqslant \sin t$, pour tout $t \in [0, \pi/2]$.

28. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]\colon 0 \leqslant -I'_n(x) \leqslant \frac{4x}{n} I_n(x)$$

puis, pour $x \in [0,1]$, la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I'_n(x)}{I_n(x)}$.

29. En déduire l'égalité

$$\forall x \in J\colon \pi \tan(\pi x) = \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}.$$

II.D. Un équivalent de α_{2n+1}

30. En utilisant la partie I.C, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \alpha_{2n+1} = \frac{2(2^{2n+2}-1)(2n+1)!}{\pi^{2n+2}}\zeta(2n+2).$$

31. En déduire un équivalent de α_{2n+1} lorsque n tend vers l'infini (on laissera $(2n+1)!$ dans l'équivalent sans le remplacer par la formule de Stirling).

Exercice 1

Pour $\alpha > 0$, on pose $g_\alpha(x) = \cos\big(\alpha \arcsin(x)\big)$ et l'on considère l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0 \quad (\mathcal{E}_\alpha).$$

32. Justifier que g_α est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$ et montrer que g_α est solution de $(\mathcal{E}_\alpha)$ sur $]-1,1[$.

33. On cherche dans cette question à résoudre le problème de Cauchy suivant : y solution de $(\mathcal{E}_\alpha)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. On cherche y sous la forme d'une série entière $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence non nul.

a. Exprimer a_{n+2} en fonction de a_n.

b. Calculer a_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$. Donner une expression de a_{2p} en fonction de p. On laissera le numérateur sous la forme d'un produit.

c. Conclure.

34. Pour quelles valeurs du paramètre α le problème de Cauchy étudié admet-il une solution polynomiale non nulle ? Plus généralement, pour quelles valeurs du paramètre α l'équation $(\mathcal{E}_\alpha)$ admet-elle au moins une solution polynomiale non nulle ?

Exercice 2

Pour $u \geqslant 0$, on pose $g(u) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-ut}}{t\,(\sqrt{t}+1)}\,\mathrm{d}t$.

35. Montrer que g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

36. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier ses variations.

37. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $g(u) \underset{\substack{u\to 0\\ u>0}}{\sim} c\,\sqrt{u}$. Quel est le domaine de dérivabilité de g ?