DMS5 - PSI*, 2025 - 2026 – corrigé

Problème — Centrale PC, 2019, épreuve 2, parties I et II

Soit l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = \dfrac{\sin x + 1}{\cos x}$.

I.A. Dérivées successives

1. Les fonctions sinus et cosinus sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et $\cos x$ ne s'y annule pas. Les règles de calcul usuelles (on utilise la dérivée d'un quotient pour f' et celle d'un produit pour les deux suivantes, ainsi que $(h^m)' = mh'h^{m-1}$) donnent

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x - (1+\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x},$$

$$f''(x) = \frac{\cos x}{\cos^2 x} + \frac{2\sin x(1+\sin x)}{\cos^3 x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x} = \frac{\sin^2 x + 2\sin x + 1}{\cos^3 x},$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{2\sin x\cos x + 2\cos x}{\cos^3 x} + \frac{3\sin x(\sin^2 x + 2\sin x + 1)}{\cos^4 x} \\ &= \frac{2\sin x(1-\sin^2 x) + 3\sin x(\sin^2 x + 2\sin x + 1)}{\cos^4 x} = \frac{\sin^3 x + 4\sin^2 x + 5\sin x + 2}{\cos^4 x}. \end{aligned}$$

L'hypothèse est donc vraie pour $n \in [\![0, 3]\!]$ avec $P_0 = P_1 = X + 1$, $P_2 = (X+1)^2$ et $P_3 = X^3 + 4X^2 + 5X + 2 = (X+1)^2(X+2)$ (la factorisation n'est pas demandée).

2. Raisonnons par récurrence simple sur n. L'initialisation a été faite à la question précédente. Admettons la formule à n fixé. En dérivant par rapport à x, il vient

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}\right) = \frac{(\cos x)P_n'(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}} - \frac{(n+1)(-\sin x)P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} \\ &= \frac{(1-\sin^2)P_n'(\sin x) + (n+1)(\sin x)P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}, \end{aligned}$$

soit $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}$ avec $P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n$. Pour ce qui est de l'unicité de P_n :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}} = \frac{Q_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}} &\iff \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: P_n(\sin x) = Q_n(\sin x) \\ &\iff \forall t \in]-1, 1] : P_n(t) - Q_n(t) = 0 \iff P_n = Q_n, \end{aligned}$$

un polynôme possédant une infinité de racines étant nul.

3. On procède également par récurrence simple. Pour $1 \leqslant n \leqslant 3$, P_n est unitaire, de degré n et à coefficients dans $\mathbb{N}$. Supposons que ce soit le cas pour un certain entier n et posons $P_n = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Alors,

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (1-X^2)P_n'(X) + (n+1)XP_n(X) = (1-X^2)\left(nX^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^{k-1}\right) + (n+1)X\left(X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_kX^k\right) \\ &= nX^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^{k-1} - nX^{n+1} - \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^{k+1} + (n+1)X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}(n+1)a_kX^{k+1} \\ &= X^{n+1} + nX^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(n+1-k)a_k}_{\in\mathbb{N}} X^{k+1} + (n+1)a_0X \end{aligned}$$

vérifie également les trois conditions. Notons qu'une ligne de plus permettrait de donner les coefficients de P_{n+1} dans la base canonique, mais ce n'est pas nécessaire.

4. Pour $x \in I$,

$$f(x)^2 + 1 = \frac{(\sin x + 1)^2}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\sin^2 x + 2\sin x + 1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2(\sin x + 1)}{\cos^2 x} = 2f'(x).$$

5. Pour tout entier naturel n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$. On calcule $\alpha_0 = f(0) = 1$ et $\alpha_1 = f'(1) = 1$, d'où $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$. Pour $n \geqslant 1$, on peut dériver n fois la relation de la question 4 en utilisant la formule de Leibniz. Il vient

$$2f^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)} \qquad \therefore \qquad 2\alpha_{n+1} = 2f^{(n+1)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0) f^{(n-k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

I.B. Développement en série entière

On note R le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ et g sa somme.

6. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre N à la fonction f, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^N + \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^N P_{N+1}(\sin t)}{N!(\cos t)^{N+2}}\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n.$$

En effet, avec $0 < t \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$, $\sin t$ et $\cos t$ sont strictement positifs et, P_{N+1} étant à coefficients positifs d'après la question 3, le reste intégral est l'intégrale d'une fonction positive avec les bornes bien orientées, donc est positif.

7. Il s'ensuit que la suite des sommes partielles de la série définissant g est bornée pour tout $x < \dfrac{\pi}{2}$. Or, cette série est à termes positifs car $\alpha_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par positivité des coefficients de P_n ou par une récurrence immédiate à partir de la formule démontrée à la question 5), donc la série converge pour tout $x < \dfrac{\pi}{2}$, donc $R \geqslant x$ pour tout $x < \dfrac{\pi}{2}$, donc $R \geqslant \dfrac{\pi}{2}$.

8. Effectuons un produit de Cauchy de g par elle-même pour $|x| < R$. Avec la question 5, on isole le terme constant, puisqu'il ne vérifie pas la même relation de récurrence. Il vient

$$\begin{aligned} g(x)^2 &= \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k \alpha_{n-k}}{k!\,(n-k)!} = \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k} \\ &= \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\alpha_{n+1} \frac{x^n}{n!} = \alpha_0^2 + 2\sum_{n=2}^{\infty} n \frac{\alpha_n}{n!} x^{n-1} = \alpha_0^2 + 2\big(g'(x) - \alpha_1\big) = 2g'(x) - 1. \end{aligned}$$

9. Pour $x \in I$, posons $f_1 = \arctan f$ et $g_1 = \arctan g$. Les relations obtenues aux questions 4 et 8 et le fait que f_1 et g_1 soient dérivables (elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$) donnent

$$\forall x \in I\colon\ f_1'(x) = \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2} = \frac{1}{2} = \frac{g'(x)}{1 + g(x)^2} = g_1'(x).$$

Ainsi, $f_1 - g_1$ est constante. Or $f(0) = g(0) = 1$, donc $f_1(0) = g_1(0)\big(= \pi/4\big)$ d'où $f_1 = g_1$ et, donc, la fonction arctangente étant injective, $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in I$.

Curieusement, il n'était pas demandé de calculer f : de $f_1'(x) = \dfrac{1}{2}$, on tire

$$f_1(x) = \frac{x}{2} + f_1(0) = \frac{x}{2} + \arctan 1 = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \qquad \therefore \qquad f(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

10. Il s'ensuit $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ x < \pi/2}} g(x) = \lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ x < \pi/2}} f(x) = +\infty$. La fonction g n'est pas définie en $\dfrac{\pi}{2}$, donc $R \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, soit *in fine* $R = \dfrac{\pi}{2}$.

I.C. Partie paire et partie impaire du développement en série entière

11. Notons $\mathcal{F}(I)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur I et soit $\Lambda \in \mathcal{L}\big(\mathcal{F}(I)\big)$ l'application qui à f associe $x \longmapsto f(-x)$. Alors, $\Lambda^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(I)}$. Donc Λ est une symétrie. Corrélativement, avec $\mathcal{P}(I)$ et $\mathcal{I}(I)$ les s.e.v. de $\mathcal{F}(I)$ formés respectivement des fonctions paires et des fonctions impaires,

$$\mathcal{F}(I) = E_1(\Lambda) \oplus E_{-1}(\Lambda) = \mathcal{P}(I) \oplus \mathcal{I}(I).$$

12. On a $f(x) = \dfrac{\sin x + 1}{\cos x} = \tan x + \dfrac{1}{\cos x}$, qui donne la décomposition de f comme somme de la fonction impaire tangente et de la fonction paire $1/\cos$. Par ailleurs, sous sa forme de série entière, $f(x) = g(x)$ se décompose en la somme de la série entière impaire $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ et de la série entière paire $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$. L'unicité de la décomposition permet d'identifier :

$$\forall x \in I\colon\ \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \& \qquad \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

13. On connaît l'expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. D'après la question 10, les deux séries de la question précédente sont de rayon de convergence au moins égal à $\pi/2$, donc le résultat s'applique. Il donne $\tan^{(n)}(0) = 0$ si n est pair et $\tan^{(n)}(0) = \alpha_n$ si n est impair.

14. On a $\tan' = 1 + \tan^2$.

15. Comme à la question 8, on fait un produit de Cauchy. On note $\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$ avec, en vertu de la question précédente, $\beta_{2p} = 0$ et $\beta_{2p+1} = \dfrac{\alpha_{2p+1}}{(2p+1)!}$. On note enfin que $\tan^2$ est paire et vaut 0 en 0, ce qui permet d'ignorer les termes nuls et d'écrire

$$\begin{aligned}
1 + \tan^2 x &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \sum_{p=0}^{2n} \beta_p \beta_{2n-p} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \sum_{k=1}^{n} \beta_{2k-1}\beta_{2n-2k+1} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_{2k-1}\alpha_{2n-2k+1}}{(2k-1)!\,(2n-2k+1)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1}\alpha_{2n-2k+1} \\
\tan'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n)!} x^{2n},
\end{aligned}$$

d'où $\alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1}\alpha_{2n-2k+1}$ par unicité du DSE.

Partie II — Une recherche d'équivalent

II.A. La fonction zêta de Riemann

Pour tout $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^s}$.

16. La fonction ζ est bien définie sur $]1, +\infty[$ (cours), ce qui sera redémontré à la question suivante par la comparaison série-intégrale. De plus, pour tout $n \geqslant 1$, la fonction $s \longmapsto \dfrac{1}{n^s} = \mathrm{e}^{-s \ln n}$ est décroissante et l'on a donc, pour $a > 1$, $\|n^{-s}\|_{[a,+\infty[,\,\infty}$. Aussi la série converge-t-elle normalement (donc uniformément) sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 1$, ce qui assure en particulier la continuité de la fonction ζ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$, donc sur $]1, +\infty[$.

17. La décroissance de $t \longmapsto t^{-s}$ donne

$$\forall n \geqslant 2\colon\ \frac{1}{n^s} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \qquad \& \qquad \forall n \geqslant 1\colon\ \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leqslant \frac{1}{n^s} \qquad \therefore$$

$$\frac{1}{1-s} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Le théorème des gendarmes donne $\zeta(s) \underset{\substack{s \to 1 \\ s<1}}{\sim} \dfrac{1}{s-1}$. En particulier, $\lim\limits_{\substack{s \to 1 \\ s<1}} \zeta(s) = +\infty$ et $\lim\limits_{s \to +\infty} \zeta(s) = 1$. La limite en l'infini peut aussi s'obtenir avec le théorème de la double limite en arguant de la convergence uniforme de la série sur $[2, +\infty[$.

18. On décompose $\zeta(s)$ selon la parité de ses indices de sommation. Il vient

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} + \frac{\zeta(s)}{2^s} \qquad \therefore \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = \big(1 - 2^{-s}\big)\zeta(s),$$

soit $C(s) = 1 - 2^{-s}$.

II.B - Une formule pour la fonction cosinus

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2xt)(\cos t)^n \,\mathrm{d}t$.

19. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

i) pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto \cos(2xt)(\cos t)^n$ est continue (par morceaux) et continue, donc intégrable sur le segment $[0, \pi/2]$;

ii) pour tout $t \in [0, \pi/2]$, la fonction $x \longmapsto \cos(2xt)(\cos t)^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$;

iii) on calcule $\dfrac{\partial}{\partial x}\big[\cos(2xt)(\cos t)^n\big] = -2t\sin(2xt)(\cos t)^n$. Cette fonction, continue (p.m.) est dominée par la constante π, trivialement intégrable.

Il s'ensuit que I_n est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $I_n'(x) = -2\displaystyle\int_0^{\pi/2} t\sin(2xt)(\cos t)^n \,\mathrm{d}t$.

On considère $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}^*$ et l'on effectue sur $I_n(x)$ deux intégrations par parties successives.

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos(2xt)}_{u'}\underbrace{(\cos t)^n}_{v} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}\big[\sin(2xt)(\cos t)^n\big]_{t=0}^{\pi/2} - \frac{n}{2x}\int_0^{\pi/2} \sin(2xt)(-\sin t(\cos t)^{n-1}) \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{2x}\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin(2xt)}_{u'}\underbrace{\sin t(\cos t)^{n-1}}_{v} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{4x^2}\big[-\cos(2xt)\sin t(\cos t)^{n-1}\big]_{t=0}^{\pi/2} - \frac{n}{4x^2}\int_0^{\pi/2} -\cos(2xt)\big[(\cos t)^n - (n-1)\sin^2 t(\cos t)^{n-2}\big] \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{4x^2}\int_0^{\pi/2} \big(n(\cos t)^n - (n-1)(\cos t)^{n-2}\big) \,\mathrm{d}t = \frac{n}{4x^2}\big(nI_n(x) - (n-1)I_{n-2}(x)\big).
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\left(1 - \frac{n^2}{4x^2}\right) I_n(x) = -\frac{n(n-1)}{4x^2} I_{n-2}(x) \qquad \therefore \qquad \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x)$$

en multipliant par $-\dfrac{4x^2}{n^2}$. La relation s'étend à $x = 0$ par continuité de I_n et de I_{n-2}. Enfin, en divisant la relation obtenue pour x par celle obtenue pour $x = 0$, *i.e.* $I_n(0) = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}(0)$, il vient

$$\left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) \frac{I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}.$$

20. On calcule facilement $I_0(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2xt) \,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2xt)}{2x}\right]_{t=0}^{\pi/2} = \frac{\sin(\pi x)}{2x}$ si $x \neq 0$ et $I_0(0) = \dfrac{\pi}{2}$, d'où

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \frac{I_0(x)}{I_0(0)} = \left(1 - \frac{4x^2}{2^2}\right)\frac{I_2(x)}{I_2(0)} = \left(1 - \frac{4x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{4x^2}{(2n)^2}\right)\frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} = \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

et le résultat en multipliant par πx, avec extension au cas $x = 0$ par continuité (ou en notant qu'elle donne trivialement $0 = 0$).

21. Le « en déduire » est miséricordieux et indique qu'il y a mieux à faire que de se lancer dans des calculs similaires sur $I_n'(x)$ ou Dieu sait quoi. Si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\cos(\pi x) = \frac{\sin(2\pi x)}{2\sin \pi x} = \frac{\operatorname{sinc}(2\pi x)}{\operatorname{sinc}(\pi x)} &= \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)} \frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)} \prod_{k=1}^{2n} \left(1 - \frac{4x^2}{k^2}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^{-1} \\
&= \frac{I_{4n}(2x) I_{2n}(0)}{I_{4n}(0) I_{2n}(x)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{4x^2}{(2k)^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^{-1} \\
&= \frac{I_{4n}(2x) I_{2n}(0)}{I_{4n}(0) I_{2n}(x)} \prod_{p=1}^{n} \left(1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right).
\end{aligned}$$

À nouveau, le résultat est trivial pour $x = 0$ $(1 = 1)$.

II.C. Un autre développement de tangente

Dans toute cette sous-partie II.C, on pose $J = [0, 1/2[$ et, pour tout entier naturel n et tout réel x de J,

$$S_n(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2^{2p+1} x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}} \right).$$

22. On utilise la comparaison série-intégrale. La fonction $t \longmapsto (2t-1)^{-s}$ étant décroissante sur $[1, +\infty[$,

$$\frac{1}{(2k-1)^s} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{(2t-1)^s} \qquad \therefore$$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(2t-1)^s} = \left[-\frac{1}{2(s-1)(2t-1)^{s-1}} \right]_n^{t \to +\infty} = \frac{1}{2(s-1)} \frac{1}{(2n-1)^{s-1}}.$$

23. La question précédente permet de majorer le terme général (positif) de la série :

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2^{2p+1} x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}} \leqslant \frac{8x}{2(2p-1)(2n-1)} \left(\frac{2x}{2n-1}\right)^{2(p-1)} = \mathfrak{o}\left(\left(\frac{2x}{2n-1}\right)^{2(p-1)}\right).$$

Pour $x \in [0, 1/2[$, $\left(\dfrac{2x}{2n-1}\right)^2 < 1$ et la série géométrique converge, ce qui assure que la fonction S_n est bien définie sur J.

24. On reprend la majoration :

$$0 \leqslant S_n(x) \leqslant \frac{2}{2n-1} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{2x}{2n-1}\right)^{2(p-1)} = \frac{2}{2n-1} \times \frac{1}{1 - \dfrac{4x^2}{(2n-1)^2}} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

ce qui montre que la suite $(S_n)_n$ converge simplement sur J vers la fonction nulle.

25. Si $x \in J$, $\cos(\pi x) \in]0, 1]$, donc $\ln\big(\cos(\pi x)\big)$ existe. Les intégrales considérées sont également strictement positives (intégration de fonctions continues positives non nulles). La question 21 donne la formule

$$-\ln(\cos(\pi x)) = -\ln\big(I_{4n}(2x)\big) + \ln\big(I_{2n}(x)\big) - \ln\left(\frac{I_{2n}(0)}{I_{4n}(0)}\right) - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right) \qquad \therefore$$

$$\pi \tan(\pi x) = -\frac{2I_{4n}'(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I_{2n}'(x)}{I_{2n}(x)} - 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{8x}{(2k-1)^2} \frac{1}{1 - \dfrac{4x^2}{(2k-1)^2}}$$

par dérivation.

26. Pour $x \in]0,1/2[$, on part de la somme ci-dessus en appliquant le DSE $\dfrac{u}{1-u} = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} u^p$ à $u = \dfrac{4x^2}{(2k-1)^2}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{8x}{(2k-1)^2} \frac{1}{1-\dfrac{4x^2}{(2k-1)^2}} + S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{x} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right)^p + \frac{2}{x} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right)^p = \frac{2}{x} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right)^p$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} 2^{2p+1} x^{2p-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2p}} \overset{(Q.18)}{=} \sum_{p=1}^{\infty} 2^{2p+1} x^{2p-1} (1-2^{-2p}) \zeta(2p) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} (2^{2p}-1) \zeta(2p) x^{2p-1} \quad \therefore$$

$$\pi \tan(\pi x) + S_n(x) = -\frac{2 I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} (2^{2p}-1) \zeta(2p) x^{2p-1}.$$

27. La fonction tangente étant convexe sur $[0, \pi/2[$, elle est au-dessus de sa tangente à l'origine, ce qui donne $t \cos t \leqslant \sin t$ pour tout $t \in [0, \pi/2[$, inégalité étendue à $\pi/2$ par continuité.

28. D'après la question 18,5, $I'_n(x) = -2 \displaystyle\int_0^{\pi/2} t \sin(2xt)(\cos t)^n \,\mathrm{d}t \leqslant 0$ car, pour $x \in [0,1]$, $0 \leqslant 2xt \leqslant \pi$ et la fonction intégrée est donc positive. On applique alors l'inégalité de convexité de la question 27, puis l'on réalise une intégration par parties :

$$-I'_n(x) = 2 \int_0^{\pi/2} t(\cos t) \sin(2xt)(\cos t)^{n-1} \,\mathrm{d}t \leqslant 2 \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin(2xt)}_{u} \underbrace{\sin t (\cos t)^{n-1}}_{v'} \,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{4}{n} \big[\sin(2xt)(-\cos^n t) \big]_0^{\pi/2} - \frac{4x}{n} \int_0^{\pi/2} \cos(2xt)(-\cos^n t) \,\mathrm{d}t = \frac{4x\, I_n(x)}{n}.$$

Le théorème des gendarmes donne alors immédiatement $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{I'_n(x)}{I_n(x)} = 0$.

29. Les questions 24 et 28 permettent de passer à la limite dans l'expression de la question 26, ce qui donne, pour $x \in J$,

$$\pi \tan(\pi x) \xleftarrow[n\to\infty]{} \pi \tan(\pi x) + S_n(x) = -\frac{2 I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} (2^{2p}-1) \zeta(2p) x^{2p-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \sum_{p=1}^{+\infty} (2^{2p}-1) \zeta(2p) x^{2p-1}.$$

II.D. Un équivalent de α_{2n+1}

30. D'après la question 12 et la question 29,

$$\pi \tan(\pi x) \overset{(Q.12)}{=} \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} (\pi x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} \pi^{2n+2} x^{2n+1} \overset{(Q.29)}{=} \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} (2^{2p}-1) \zeta(2p) x^{2p-1}.$$

La série entière étant de rayon de convergence non nul en vertu de la question 7, il y a unicité du DSE et l'identification des coefficients donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon \alpha_{2n+1} = \frac{2(2^{2n+2}-1)(2n+1)!}{\pi^{2n+2}} \zeta(2n+2).$$

31. La question 17 donne $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \zeta(2n+2) = 1$. Il s'ensuit

$$\alpha_{2n+1} \sim \frac{2^{2n+3}(2n+1)!}{\pi^{2n+2}}.$$

Exercice 1 — Banque PT, 2010, épreuve C (extrait)

32. Les fonctions $x \mapsto \alpha \arcsin x$ et $u \mapsto \cos(u)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et $\mathbb{R}$ respectivement. Par composition, g_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
Pour tout $x \in]-1,1[$, la formule de dérivation d'une fonction composée donne

$$g_\alpha'(x) = -\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\alpha \arcsin x),$$

$$g_\alpha''(x) = \frac{-\alpha x}{(1-x^2)^{3/2}} \sin(\alpha \arcsin x) - \frac{\alpha^2}{1-x^2} \cos(\alpha \arcsin x)$$

La dérivée seconde de g_α peut se réécrire

$$g_\alpha''(x) = \frac{x}{1-x^2} g_\alpha'(x) - \frac{\alpha^2}{1-x^2} g_\alpha(x),$$

ce qui montre que g_α est solution de $(\mathcal{E}_\alpha)$ sur $]-1,1[$.

33.a. On suppose que pour $x \in]-1,1[$, $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = y(0) = 1$, $a_1 = y'(0) = 0$ et un rayon de convergence $R > 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
\left(1-x^2\right) y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x) &= (1-x^2) \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \alpha^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^2 a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - \left(n^2 - \alpha^2\right) a_n\right] x^n.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, comme cette série entière est supposée nulle sur $]-1,1[$, tous ses coefficients sont nuls. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = \frac{n^2 - \alpha^2}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

33.b. Comme $a_1 = 0$, $a_3 = \dfrac{1-\alpha^2}{2 \times 3} a_1 = 0$ et, par une récurrence immédiate, $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, on obtient immédiatement

$$\forall p \geqslant 1 \colon a_{2p} = \frac{(2p-2)^2 - \alpha^2}{2p(2p-1)} \times \frac{(2p-4)^2 - \alpha^2}{(2p-2)(2p-3)} \times \cdots \times \frac{0^2 - \alpha^2}{2 \times 1} \times a_0 = \frac{1}{(2p)!} \prod_{k=0}^{p-1} \left(4k^2 - \alpha^2\right).$$

33.c. À partir de ces coefficients, on forme la série entière $\displaystyle\sum_{p \geqslant 0} a_{2p} x^{2p}$. Pour $x \neq 0$, posons $u_p = \left|a_{2p} x^{2p}\right|$. La relation de récurrence de la question 3.a donne

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \left|\frac{a_{2p+2}}{a_{2p}}\right| x^2 = \frac{\left|(2p)^2 - \alpha^2\right|}{(2p+1)(2p+2)} x^2 \xrightarrow[p \to +\infty]{} x^2.$$

D'après le critère de d'Alembert, si $|x| < 1$, la série est absolument convergente et si $|x| > 1$, la série est divergente. Le rayon de convergence vaut donc 1... sauf si α est un entier pair car, dans ce cas, la suite $\left(a_{2p}\right)_p$ est nulle à partir d'un certain rang ; la série entière est un polynôme et le rayon de convergence est infini. Dans tous les cas, $R. > 0$ et l'on a bien résolu le problème de Cauchy proposé. La série entière $\displaystyle\sum_{p \geqslant 0} a_{2p} x^{2p}$ est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ sur l'intervalle $]-1,1[$.

34. On a déjà répondu à la première partie de la question ci-dessus. Dans le cas général, on peut reprendre les calculs précédents avec a_0 et a_1 quelconques. On suppose que a_0 ou a_1 est non nul. S'il existe une solution polynomiale $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de $(\mathcal{E})$, alors la suite $\left(a_n\right)_n$ est nulle à partir d'un certain rang, donc il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{n^2 - \alpha^2}{(n+1)(n+2)} = 0$ ce qui impose $\alpha = \pm n$ donc $\alpha \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, supposons que α est un entier relatif. Supposons pour fixer les idées que α est pair. On trouve alors une solution polynomiale (non nulle) en posant $a_1 = 0$ et $a_0 = 1$ (de même, en inversant si α est impair).

Exercice 2 — Oral Mines-Ponts)

Pour $u \geqslant 0$, on pose $g(u) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-ut}}{t(\sqrt{t}+1)}\,\mathrm{d}t$.

35. On montre que g vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètre :

(i) pour tout $u > 0$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-ut}}{t(\sqrt{t}+1)}$ est continue (p.m.) sur $]0, +\infty[$;

(ii) pour tout $t > 0$, la fonction $u \longmapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-ut}}{t(\sqrt{t}+1)}$ est continue sur $]0, +\infty[$;

(iii) pour dominer la fonction, on va d'abord donner deux majorations du numérateur ; l'une sera pertinente pour les petites valeurs de t, l'autre pour les grandes. Tout d'abord, on a trivialement $0 \leqslant 1-\mathrm{e}^{-ut} \leqslant 1$; par ailleurs, $1-\mathrm{e}^{-x} = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant x$, d'où $0 \leqslant 1-\mathrm{e}^{-ut} \leqslant ut$. Ainsi,

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-ut}}{t(\sqrt{t}+1)} \leqslant \frac{1}{t(\sqrt{t}+1)} \leqslant \frac{1}{t^{3/2}} \qquad \& \qquad \frac{1-\mathrm{e}^{-ut}}{t(\sqrt{t}+1)} \leqslant \frac{u}{\sqrt{t}+1} \qquad \therefore$$

$$\forall a > 0,\ \forall x \in [0, a],\ \forall t > 0 \colon 0 \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-ut}}{t(\sqrt{t}+1)} \leqslant \frac{a}{\sqrt{t}+1}\mathbb{1}_{[0,1]}(t) + \frac{1}{t^{3/2}}\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(t),$$

ce qui donne une domination intégrable et permet d'appliquer le théorème de continuité sur $[0, a]$. Corrélativement, g est bien définie et continue sur $[0, a]$ pour tout $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+$.

36. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

(i) Pour tout $u > 0$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-ut}}{t(\sqrt{t}+1)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$; cela vient de la domination montrée à la question précédente et du théorème de comparaison.

(ii) Pour tout $t > 0$, la fonction $u \longmapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-ut}}{t(\sqrt{t}+1)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

(iii) Pour tout $u > 0$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-ut}}{t(\sqrt{t}+1)}\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{-ut}}{\sqrt{t}+1}$ est continue (p.m.) sur $\mathbb{R}_+$.

(iv) Passons à la domination.

$$\forall a > 0,\ \forall x \in [a, +\infty[\colon 0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-ut}}{\sqrt{t}+1} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-at}}{\sqrt{t}+1} \underset{t\to+\infty}{=} \mathfrak{o}\left(\mathrm{e}^{-at}\right),$$

fonction de référence intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de dérivation s'applique donc sur $[a, +\infty[$ et g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ (la question 37 prouvera que g n'est pas dérivable en 0 et que ce résultat est donc optimal).

Il est alors clair que, pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(u) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ut}}{\sqrt{t}+1} > 0$, donc g est croissante. Cela pouvait aussi s'obtenir directement à partir des variations de $u \mapsto \mathrm{e}^{-ut}$ et la croissance de l'intégrale.

Remarque. On a suivi l'énoncé (c'est un peu la règle du jeu...) La partie la plus difficile est sans doute la domination du théorème de continuité. C'est un bon exemple d'intégrale à paramètre où, si l'énoncé en laisse la possibilité et que l'on applique directement le théorème de dérivation, il est plus facile de prouver l'intégrabilité à l'ordre 0 et la domination à l'ordre 1. De même, pour montrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$, on montrerait l'intégrabilité à l'ordre 0 et la domination pour toutes les dérivées d'ordre $p \geqslant 1$.

37. On pose $x = ut$ dans l'intégrale définissant g. Il vient

$$g(u) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-ut}}{t(\sqrt{t}+1)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{u}}+1\right)}\,\mathrm{d}x = \sqrt{u}\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt{u})}\,\mathrm{d}x = \sqrt{u}\,h(u).$$

Appliquons le théorème de continuité à h sur $\mathbb{R}_+$. Les deux premières hypothèses sont clairement vérifiées. Par ailleurs,

$$\forall x > 0,\ \forall u > 0\colon 0 \leqslant \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x\big(\sqrt{x} + \sqrt{u}\big)} \leqslant \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x\sqrt{x}} = \tau(x) \qquad \& \qquad \tau(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}},\ \tau(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Ainsi, τ est une domination intégrable, le théorème s'applique et h est continue en 0. Corrélativement, $g(u) \underset{\substack{u \to 0 \\ u > 0}}{\sim} c\sqrt{u}$ avec $c = h(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

La fonction $u \longmapsto \sqrt{u}$ n'étant pas dérivable en 0 (la limite de son taux d'accroissement à l'origine est infinie), il en va de même pour g, dont le domaine de dérivabilité est ainsi $\mathbb{R}^*$.