

Problème — Centrale PC, 2019, épreuve 2, parties I et II

Soit l'intervalle  $I = ]-\pi/2, \pi/2[$ . On considère la fonction  $f$  définie sur  $I$  par  $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$ .

I.A. Dérivées successives

1. Les fonctions sinus et cosinus sont de classe  $C^\infty$  sur  $I$  et  $\cos x$  ne s'y annule pas. Les règles de calcul usuelles (on utilise la dérivée d'un quotient pour  $f'$  et celle d'un produit pour les deux suivantes, ainsi que  $(h^m)' = mh'h^{m-1}$ ) donnent

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos^2 x - (1 + \sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x}, \\ f''(x) &= \frac{\cos x}{\cos^2 x} + \frac{2 \sin x(1 + \sin x)}{\cos^3 x} = \frac{\cos^2 x + 2 \sin x + 2 \sin^2 x}{\cos^3 x} = \frac{\sin^2 x + 2 \sin x + 1}{\cos^3 x}, \\ f'''(x) &= \frac{2 \sin x \cos x + 2 \cos x}{\cos^3 x} + \frac{3 \sin x(\sin^2 x + 2 \sin x + 1)}{\cos^4 x} \\ &= \frac{2 \sin x(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x(\sin^2 x + 2 \sin x + 1)}{\cos^4 x} = \frac{\sin^3 x + 4 \sin^2 x + 5 \sin x + 2}{\cos^4 x}. \end{aligned}$$

L'hypothèse est donc vraie pour  $n \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$  avec  $P_0 = P_1 = X + 1$ ,  $P_2 = (X + 1)^2$  et  $P_3 = X^3 + 4X^2 + 5X + 2 = (X + 1)^2(X + 2)$  (la factorisation n'est pas demandée).

2. Raisonnons par récurrence simple sur  $n$ . L'initialisation a été faite à la question précédente. Admettons la formule à  $n$  fixé. En dérivant par rapport à  $x$ , il vient

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}} \right) = \frac{(\cos x)P'_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}} - \frac{(n+1)(-\sin x)P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} \\ &= \frac{(1 - \sin^2)P'_n(\sin x) + (n+1)(\sin x)P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}, \end{aligned}$$

soit  $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}$  avec  $P_{n+1} = (1 - X^2)P'_n + (n+1)XP_n$ . Pour ce qui est de l'unicité de  $P_n$  :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ : \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}} = \frac{Q_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}} &\iff \forall x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ : P_n(\sin x) = Q_n(\sin x) \\ &\iff \forall t \in ]-1, 1[ : P_n(t) - Q_n(t) = 0 \iff P_n = Q_n, \end{aligned}$$

un polynôme possédant une infinité de racines étant nul.

3. On procède également par récurrence simple. Pour  $1 \leq n \leq 3$ ,  $P_n$  est unitaire, de degré  $n$  et à coefficients dans  $\mathbb{N}$ . Supposons que ce soit le cas pour un certain entier  $n$  et posons  $P_n = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ . Alors,

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (1 - X^2)P'_n(X) + (n+1)XP_n(X) = (1 - X^2) \left( nX^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^{k-1} \right) + (n+1)X \left( X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right) \\ &= nX^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^{k-1} - nX^{n+1} - \sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^{k+1} + (n+1)X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (n+1)a_k X^{k+1} \\ &= X^{n+1} + nX^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(n+1-k)a_k}_{\in \mathbb{N}} X^{k+1} + (n+1)a_0 X \end{aligned}$$

vérifie également les trois conditions. Notons qu'une ligne de plus permettrait de donner les coefficients de  $P_{n+1}$  dans la base canonique, mais ce n'est pas nécessaire.

4. Pour  $x \in I$ ,

$$f(x)^2 + 1 = \frac{(\sin x + 1)^2}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\sin^2 x + 2 \sin x + 1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2(\sin x + 1)}{\cos^2 x} = 2f'(x).$$

5. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$ . On calcule  $\alpha_0 = f(0) = 1$  et  $\alpha_1 = f'(1) = 1$ , d'où  $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ . Pour  $n \geq 1$ , on peut dériver  $n$  fois la relation de la question 4 en utilisant la formule de Leibniz. Il vient

$$2f^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)} \quad \therefore \quad 2\alpha_{n+1} = 2f^{(n+1)}(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(0) f^{(n-k)}(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

### I.B. Développement en série entière

On note  $R$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$  et  $g$  sa somme.

6. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre  $N$  à la fonction  $f$ , qui est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t) dt = \sum_{n=0}^N \frac{\alpha_n}{n!} x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^N P_{N+1}(\sin t)}{N!(\cos t)^{N+2}} dt \geq \sum_{n=0}^N \frac{\alpha_n}{n!} x^n.$$

En effet, avec  $0 < t \leq x < \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin t$  et  $\cos t$  sont strictement positifs et,  $P_{N+1}$  étant à coefficients positifs d'après la question 3, le reste intégral est l'intégrale d'une fonction positive avec les bornes bien orientées, donc est positif.

7. Il s'ensuit que la suite des sommes partielles de la série définissant  $g$  est bornée pour tout  $x < \frac{\pi}{2}$ . Or, cette série est à termes positifs car  $\alpha_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (par positivité des coefficients de  $P_n$  ou par une récurrence immédiate à partir de la formule démontrée à la question 5), donc la série converge pour tout  $x < \frac{\pi}{2}$ , donc  $R \geq x$  pour tout  $x < \frac{\pi}{2}$ , donc  $R \geq \frac{\pi}{2}$ . On peut aussi s'intéresser à la convergence absolue de la série, ce qui évite de préciser que les  $\alpha_n$  sont positifs.

8. Effectuons un produit de Cauchy de  $g$  par elle-même pour  $|x| < R$ . Avec la question 5, on isole le terme constant, puisqu'il ne vérifie pas la même relation de récurrence. Il vient

$$\begin{aligned} g(x)^2 &= \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k \alpha_{n-k}}{k!(n-k)!} = \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k} \\ &= \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\alpha_{n+1} \frac{x^n}{n!} = \alpha_0^2 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{\alpha_n}{n!} x^{n-1} = \alpha_0^2 + 2(g'(x) - \alpha_1) = 2g'(x) - 1. \end{aligned}$$

9. Pour  $x \in I$ , posons  $f_1 = \arctan f$  et  $g_1 = \arctan g$ . Les relations obtenues aux questions 4 et 8 et le fait que  $f_1$  et  $g_1$  soient dérivables (elles sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ) donnent

$$\forall x \in I: f_1'(x) = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} = \frac{1}{2} = \frac{g'(x)}{1+g(x)^2} = g_1'(x).$$

Ainsi,  $f_1 - g_1$  est constante. Or  $f(0) = g(0) = 1$ , donc  $f_1(0) = g_1(0) (= \pi/4)$  d'où  $f_1 = g_1$  et, donc, la fonction arctangente étant injective,  $f(x) = g(x)$  pour tout  $x \in I$ .

10. Il s'ensuit  $\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} f(x) = +\infty$ . La fonction  $g$  n'est pas définie en  $\frac{\pi}{2}$ , donc  $R \leq \frac{\pi}{2}$ , soit *in fine*

$$R = \frac{\pi}{2}.$$

### I.C. Partie paire et partie impaire du développement en série entière

11. Notons  $\mathcal{F}(I)$  l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur  $I$  et soit  $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(I))$  l'application qui à  $f$  associe  $x \mapsto f(-x)$ . Alors,  $\Lambda^2 = \text{id}_{\mathcal{F}(I)}$ . Donc  $\Lambda$  est une symétrie. Corrélativement, avec  $\mathcal{P}(I)$  et  $\mathcal{I}(I)$  les s.e.v. de  $\mathcal{F}(I)$  formés respectivement des fonctions paires et des fonctions impaires,

$$\mathcal{F}(I) = E_1(\Lambda) \oplus E_{-1}(\Lambda) = \mathcal{P}(I) \oplus \mathcal{I}(I).$$

12. On a  $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x} = \tan x + \frac{1}{\cos x}$ , qui donne la décomposition de  $f$  comme somme de la fonction impaire tangente et de la fonction paire  $1/\cos$ . Par ailleurs, sous sa forme de série entière,  $f(x) = g(x)$  se

décompose en la somme de la série entière impaire  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$  et de la série entière paire  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$ , de rayons de convergence respectifs au moins égaux à celui de  $f$ , soit  $\pi/2$  par la question 10 (rappelons que cela découle immédiatement de la définition du rayon de convergence car  $(a_n r^n)_n$  est bornée si, et seulement si,  $(a_{2n} r^{2n})_n$  et  $(a_{2n+1} r^{2n+1})_n$  le sont). L'unicité de la décomposition permet alors d'identifier :

$$\forall x \in I: \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \& \quad \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

**13.** On connaît l'expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul. D'après la question 10, les deux séries de la question précédente sont de rayon de convergence au moins égal à  $\pi/2$ , donc le résultat s'applique. Il donne  $\tan^{(n)}(0) = 0$  si  $n$  est pair et  $\tan^{(n)}(0) = \alpha_n$  si  $n$  est impair.

**14.** On a  $\tan' = 1 + \tan^2$ .

**15.** Comme à la question 8, on fait un produit de Cauchy. On note  $\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$  avec, en vertu de la question précédente,  $\beta_{2p} = 0$  et  $\beta_{2p+1} = \frac{\alpha_{2p+1}}{(2p+1)!}$ . On note enfin que  $\tan^2$  est paire et vaut 0 en 0, ce qui permet d'ignorer les termes nuls et d'écrire

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 x &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \sum_{p=0}^{2n} \beta_p \beta_{2n-p} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \sum_{k=1}^n \beta_{2k-1} \beta_{2n-2k+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1}}{(2k-1)! (2n-2k+1)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sum_{k=1}^n \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1} \\ \tan'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n)!} x^{2n}, \end{aligned}$$

d'où  $\alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^n \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1}$  par unicité du DSE. Il est aussi possible de procéder comme à la question 4 et dériver la relation de la question 14 grâce à la formule de Leibniz et à l'expression des coefficients obtenue à la question 12.

## Partie II — Une recherche d'équivalent

### II.A. La fonction zêta de Riemann

Pour tout  $s > 1$ , on pose  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ .

**16.** La fonction  $\zeta$  est bien définie sur  $]1, +\infty[$  (cours), ce qui sera redémontré à la question suivante par la comparaison série-intégrale. De plus, pour tout  $n \geq 1$ , la fonction  $s \mapsto \frac{1}{n^s} = e^{-s \ln n}$  est décroissante et l'on a donc, pour  $a > 1$ ,  $\|n^{-s}\|_{[a, +\infty[, \infty}$ . Aussi la série converge-t-elle normalement (donc uniformément) sur tout intervalle de la forme  $[a, +\infty[$  avec  $a > 1$ , ce qui assure en particulier la continuité de la fonction  $\zeta$  sur  $[a, +\infty[$  pour tout  $a > 1$ , donc sur  $]1, +\infty[$ .

**17.** La décroissance de  $t \mapsto t^{-s}$  donne

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2: \frac{1}{n^s} &\leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^s} \quad \& \quad \forall n \geq 1: \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s} \quad \dots \\ \frac{1}{1-s} &= \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = 1 + \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Le théorème des gendarmes donne  $\zeta(s) \underset{s \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{s-1}$ . En particulier,  $\lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s) = +\infty$  et  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = 1$ . La limite en l'infini peut aussi s'obtenir avec le théorème de la double limite en arguant de la convergence uniforme de

la série sur  $[2, +\infty[$ .

**18.** On décompose  $\zeta(s)$  selon la parité de ses indices de sommation. Il vient

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} + \frac{\zeta(s)}{2^s} \quad \therefore \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = (1 - 2^{-s})\zeta(s),$$

soit  $C(s) = 1 - 2^{-s}$ .

## II.B - Une formule pour la fonction cosinus

Pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$ , on pose  $I_n(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(2xt)(\cos t)^n dt$ .

**19.** On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

- i) pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto \cos(2xt)(\cos t)^n$  est continue (par morceaux) et continue, donc intégrable sur le segment  $[0, \pi/2]$ ;
- ii) pour tout  $t \in [0, \pi/2]$ , la fonction  $x \mapsto \cos(2xt)(\cos t)^n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ;
- iii) on calcule  $\frac{\partial}{\partial x} [\cos(2xt)(\cos t)^n] = -2t \sin(2xt)(\cos t)^n$ . Cette fonction, continue (p.m.) est dominée par la constante  $\pi$ , trivialement intégrable.

Il s'ensuit que  $I_n$  est bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $I'_n(x) = -2 \int_0^{\pi/2} t \sin(2xt)(\cos t)^n dt$ .

On considère  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  et  $x \in \mathbb{R}^*$  et l'on effectue sur  $I_n(x)$  deux intégrations par parties successives.

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos(2xt)}_{u'} \underbrace{(\cos t)^n}_v dt = \frac{1}{2x} [\sin(2xt)(\cos t)^n]_{t=0}^{\pi/2} - \frac{n}{2x} \int_0^{\pi/2} \sin(2xt)(-\sin t)(\cos t)^{n-1} dt \\ &= \frac{n}{2x} \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin(2xt)}_{u'} \underbrace{\sin t(\cos t)^{n-1}}_v dt \\ &= \frac{n}{4x^2} [-\cos(2xt) \sin t(\cos t)^{n-1}]_{t=0}^{\pi/2} - \frac{n}{4x^2} \int_0^{\pi/2} -\cos(2xt) [(\cos t)^n - (n-1) \sin^2 t(\cos t)^{n-2}] dt \\ &= \frac{n}{4x^2} \int_0^{\pi/2} (n(\cos t)^n - (n-1)(\cos t)^{n-2}) dt = \frac{n}{4x^2} (nI_n(x) - (n-1)I_{n-2}(x)). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\left(1 - \frac{n^2}{4x^2}\right) I_n(x) = -\frac{n(n-1)}{4x^2} I_{n-2}(x) \quad \therefore \quad \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x)$$

en multipliant par  $-\frac{4x^2}{n^2}$ . La relation s'étend à  $x = 0$  par continuité de  $I_n$  et de  $I_{n-2}$ . Enfin, en divisant la relation obtenue pour  $x$  par celle obtenue pour  $x = 0$ , *i.e.*  $I_n(0) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(0)$ , il vient

$$\left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) \frac{I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}.$$

**20.** On calcule facilement  $I_0(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(2xt) dt = \left[\frac{\sin(2xt)}{2x}\right]_{t=0}^{\pi/2} = \frac{\sin(\pi x)}{2x}$  si  $x \neq 0$  et  $I_0(0) = \frac{\pi}{2}$ , d'où

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \frac{I_0(x)}{I_0(0)} = \left(1 - \frac{4x^2}{2^2}\right) \frac{I_2(x)}{I_2(0)} = \left(1 - \frac{4x^2}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{4x^2}{(2n)^2}\right) \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} = \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

et le résultat en multipliant par  $\pi x$ , avec extension au cas  $x = 0$  par continuité (ou en notant qu'elle donne trivialement  $0 = 0$ ).

**21.** Le « en déduire » est miséricordieux et indique qu'il y a mieux à faire que de se lancer dans des calculs similaires sur  $I'_n(x)$  ou Dieu sait quoi. Si  $x \in ]0, 1[$ ,  $\sin(\pi x) \neq 0$  et

$$\begin{aligned}\cos(\pi x) &= \frac{\sin(2\pi x)}{2\sin(\pi x)} = \frac{\operatorname{sinc}(2\pi x)}{\operatorname{sinc}(\pi x)} = \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)} \frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)} \prod_{k=1}^{2n} \left(1 - \frac{4x^2}{k^2}\right) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^{-1} \\ &= \frac{I_{4n}(2x)I_{2n}(0)}{I_{4n}(0)I_{2n}(x)} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{4x^2}{(2k)^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^{-1} \\ &= \frac{I_{4n}(2x)I_{2n}(0)}{I_{4n}(0)I_{2n}(x)} \prod_{p=1}^n \left(1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right).\end{aligned}$$

À nouveau, le résultat est trivial pour  $x = 0$  ( $1 = 1$ ).

### II.C. Un autre développement de tangente

Dans toute cette sous-partie II.C, on pose  $J = [0, 1/2[$  et, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$  de  $J$ ,

$$S_n(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}} \right).$$

**22.** On utilise la comparaison série-intégrale. La fonction  $t \mapsto (2t-1)^{-s}$  étant décroissante sur  $[1, +\infty[$ ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2k-1)^s} &\leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{(2t-1)^s} \quad \dots \\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} &\leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{(2t-1)^s} = \left[ -\frac{1}{2(s-1)(2t-1)^{s-1}} \right]_n^{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{2(s-1)} \frac{1}{(2n-1)^{s-1}}.\end{aligned}$$

En particulier, la somme majorée est convergente.

**23.** La question précédente permet de majorer le terme général (positif) de la série :

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}} \leq \frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{2(2p-1)(2n-1)^{2p-1}} = \frac{4x}{(2p-1)(2n-1)} \left(\frac{2x}{2n-1}\right)^{2(p-1)} = o\left(\left(\frac{2x}{2n-1}\right)^{2(p-1)}\right)$$

quand  $p$  tend vers l'infini. Pour  $x \in [0, 1/2[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\left(\frac{2x}{2n-1}\right)^2 < 1$  et la série géométrique converge, ce qui assure que la fonction  $S_n$  est bien définie sur  $J$ . Alternativement,

$$\forall (p, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : \frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{2(2p-1)(2n-1)^{2p-1}} \leq \frac{2^{2p}x^{2p-1}}{2p-1} = a_p, \quad \frac{a_{p+1}}{a_p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 4x^2,$$

ce qui fait de  $S_n(x)$  une série entière de rayon de convergence au moins  $1/2$ , d'où la convergence simple sur  $J$ .

**24.** On reprend la majoration précédente : pour  $x \in J$  et  $p \geq 1$ ,  $\frac{4x}{(2p-1)(2n-1)} \leq \frac{2}{2n-1}$ , d'où

$$0 \leq S_n(x) \leq \frac{2}{2n-1} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{2x}{2n-1}\right)^{2(p-1)} = \frac{2}{2n-1} \times \frac{1}{1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

ce qui montre que la suite  $(S_n)_n$  converge simplement sur  $J$  vers la fonction nulle. Alternativement, mais c'est plus compliqué, on peut poser

$$0 \leq f_{p,x}(y) \leq \frac{4x}{(2p-1)(2y-1)} \left(\frac{2x}{2y-1}\right)^{2(p-1)} \leq \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{2p-1}$$

pour tout  $x \in J$  et  $y \geq 2$ . La série de terme général  $\frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{2p-1}$  étant convergente, la série  $\sum_{p=1}^{\infty} f_{p,x}(y)$  converge normalement sur  $[2, +\infty[$  et le théorème de la double limite s'applique, donnant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{\infty} f_{p,x}(n) = \sum_{p=1}^{\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} f_{p,x}(n) = 0.$$

**25.** Si  $x \in J$ ,  $\cos(\pi x) \in ]0, 1]$ , donc  $\ln(\cos(\pi x))$  existe. Les intégrales considérées sont également strictement positives (intégration de fonctions continues positives non nulles). La question 21 donne la formule

$$-\ln(\cos(\pi x)) = -\ln(I_{4n}(2x)) + \ln(I_{2n}(x)) - \ln\left(\frac{I_{2n}(0)}{I_{4n}(0)}\right) - \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right),$$

d'où, en dérivant par rapport à  $x$ ,

$$\pi \tan(\pi x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} - 0 + \sum_{k=1}^n \frac{8x}{(2k-1)^2} \frac{1}{1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2}}.$$

**26.** Pour  $x \in ]0, 1/2[$ , on part de la somme ci-dessus en appliquant le DSE  $\frac{u}{1-u} = \sum_{p=1}^{\infty} u^p$  à  $u = \frac{4x^2}{(2k-1)^2}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{8x}{(2k-1)^2} \frac{1}{1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2}} + S_n(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{x} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right)^p + \frac{2}{x} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right)^p = \frac{2}{x} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right)^p \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} 2^{2p+1} x^{2p-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2p}} \stackrel{(Q.18)}{=} \sum_{p=1}^{\infty} 2^{2p+1} x^{2p-1} (1-2^{-2p})\zeta(2p) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} (2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1} \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\pi \tan(\pi x) + S_n(x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} (2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}.$$

**27.** La fonction tangente étant convexe sur  $[0, \pi/2[$ , elle est au-dessus de sa tangente à l'origine, ce qui donne  $t \cos t \leq \sin t$  pour tout  $t \in [0, \pi/2[$ , inégalité étendue à  $\pi/2$  par continuité. On peut aussi poser  $\delta(t) = \sin t - t \cos t$  et calculer  $\delta'(t) = t \sin t \geq 0$ , d'où  $\delta(t) \geq \delta(0) = 0$ .

**28.** D'après la question 19,  $I'_n(x) = -2 \int_0^{\pi/2} t \sin(2xt)(\cos t)^n dt \leq 0$  car, pour  $x \in [0, 1]$ ,  $0 \leq 2xt \leq \pi$  et la fonction intégrée est donc positive. On applique alors l'inégalité de convexité de la question 27, puis l'on réalise une intégration par parties :

$$\begin{aligned} -I'_n(x) &= 2 \int_0^{\pi/2} t(\cos t) \sin(2xt)(\cos t)^{n-1} dt \leq 2 \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin(2xt)}_u \underbrace{\sin t(\cos t)^{n-1}}_{v'} dt \\ &\leq \frac{4}{n} [\sin(2xt)(-\cos^n t)]_0^{\pi/2} - \frac{4x}{n} \int_0^{\pi/2} \cos(2xt)(-\cos^n t) dt = \frac{4x I_n(x)}{n}. \end{aligned}$$

Le théorème des gendarmes donne alors immédiatement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I'_n(x)}{I_n(x)} = 0$ .

**29.** Les questions 24 et 28 permettent de passer à la limite dans l'expression de la question 26, ce qui donne, pour  $x \in J$ ,

$$\pi \tan(\pi x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pi \tan(\pi x) + S_n(x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} (2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2 \sum_{p=1}^{+\infty} (2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}.$$

## II.D. Un équivalent de $\alpha_{2n+1}$

**30.** D'après la question 12 et la question 29,

$$2 \sum_{p=1}^{+\infty} (2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1} \stackrel{(Q.29)}{=} \pi \tan(\pi x) \stackrel{(Q.12)}{=} \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} (\pi x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} \pi^{2n+2} x^{2n+1}.$$

La série entière étant de rayon de convergence non nul en vertu de la question 7, il y a unicité du DSE et l'identification des coefficients donne

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} \pi^{2n+2} = 2(2^{2n+2}-1)\zeta(2n+2) \quad \therefore \quad \alpha_{2n+1} = \frac{2(2^{2n+2}-1)(2n+1)!}{\pi^{2n+2}} \zeta(2n+2).$$

31. La question 17 donne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \zeta(2n+2) = 1$ . Il s'ensuit

$$\alpha_{2n+1} \sim \frac{2^{2n+3}(2n+1)!}{\pi^{2n+2}}.$$

### Exercice 1 — Banque PT, 2010, épreuve C (extrait)

32. Les fonctions  $x \mapsto \alpha \arcsin x$  et  $u \mapsto \cos(u)$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$  et  $\mathbb{R}$  respectivement. Par composition,  $g_\alpha$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$ . Pour tout  $x \in ] -1, 1[$ , la formule de dérivation d'une fonction composée donne

$$g'_\alpha(x) = -\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\alpha \arcsin x) \quad \&$$

$$g''_\alpha(x) = \frac{-\alpha x}{(1-x^2)^{3/2}} \sin(\alpha \arcsin x) - \frac{\alpha^2}{1-x^2} \cos(\alpha \arcsin x) = \frac{x}{1-x^2} g'_\alpha(x) - \frac{\alpha^2}{1-x^2} g_\alpha(x),$$

ce qui montre que  $g_\alpha$  est solution de  $(\mathcal{E}_\alpha)$  sur  $] -1, 1[$ .

33.a. On suppose que pour  $x \in ] -1, 1[$ ,  $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  avec  $a_0 = y(0) = 1$ ,  $a_1 = y'(0) = 0$  et un rayon de convergence  $R > 0$ . Alors,

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x) = (1-x^2) \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \alpha^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^2 a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2 - \alpha^2)a_n] x^n.$$

Par unicité du développement en série entière, comme cette série entière est supposée nulle sur  $] -1, 1[$ , tous ses coefficients sont nuls. Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_{n+2} = \frac{n^2 - \alpha^2}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

33.b. Comme  $a_1 = 0$ ,  $a_3 = \frac{1-\alpha^2}{2 \times 3} a_1 = 0$  et, par une récurrence immédiate,  $a_{2p+1} = 0$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . Par ailleurs, on obtient immédiatement

$$\forall p \geq 1: a_{2p} = \frac{(2p-2)^2 - \alpha^2}{2p(2p-1)} \times \frac{(2p-4)^2 - \alpha^2}{(2p-2)(2p-3)} \times \cdots \times \frac{0^2 - \alpha^2}{2 \times 1} \times a_0 = \frac{1}{(2p)!} \prod_{k=0}^{p-1} (4k^2 - \alpha^2).$$

33.c. À partir de ces coefficients, on forme la série entière  $\sum_{p \geq 0} a_{2p} x^{2p}$ . Pour  $x \neq 0$ , posons  $u_p = |a_{2p} x^{2p}|$ . La relation de récurrence de la question 33.a donne

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \left| \frac{a_{2p+2}}{a_{2p}} \right| x^2 = \frac{|(2p)^2 - \alpha^2|}{(2p+1)(2p+2)} x^2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} x^2.$$

D'après la règle de d'Alembert, si  $|x| < 1$ , la série est absolument convergente et si  $|x| > 1$ , la série est divergente. Le rayon de convergence vaut donc 1... sauf si  $\alpha$  est un entier pair car, dans ce cas, la suite  $(a_{2p})_p$  est nulle à partir d'un certain rang; la série entière est un polynôme et le rayon de convergence est infini. Dans tous les cas,  $R > 0$  et l'on a bien résolu le problème de Cauchy proposé. La série entière  $\sum_{p \geq 0} a_{2p} x^{2p}$  est solution

de l'équation différentielle  $(\mathcal{E})$  sur l'intervalle  $] -1, 1[$ . Par unicité de la solution (on observe que la fonction  $1-x^2$  ne s'annule pas sur  $] -1, 1[$ ),  $g_\alpha$  est solution et l'on a donc :

$$\forall x \in ] -1, 1[: g_\alpha(x) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} \prod_{k=0}^{p-1} (4k^2 - \alpha^2) x^{2p}.$$

**34.** On a déjà répondu à la première partie de la question ci-dessus. Dans le cas général, on peut reprendre les calculs précédents avec  $a_0$  et  $a_1$  quelconques. On suppose que  $a_0$  ou  $a_1$  est non nul. S'il existe une solution polynomiale  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  de  $(\mathcal{E})$ , alors la suite  $(a_n)_n$  est nulle à partir d'un certain rang, donc il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{n^2 - \alpha^2}{(n+1)(n+2)} = 0$  ce qui impose  $\alpha = \pm n$  donc  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . Réciproquement, supposons que  $\alpha$  soit un entier relatif. Supposons pour fixer les idées que  $\alpha$  est pair. On trouve alors une solution polynomiale (non nulle) en posant  $a_1 = 0$  et  $a_0 = 1$  (de même, en inversant si  $\alpha$  est impair).

## Exercice 2 (oral Mines-Ponts)

Pour  $u \geq 0$ , on pose  $g(u) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ut}}{t(\sqrt{t} + 1)} dt$ .

**35.** On montre que  $g$  vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètre :

- (i) pour tout  $u > 0$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1 - e^{-ut}}{t(\sqrt{t} + 1)}$  est continue (p.m.) sur  $]0, +\infty[$ ;
- (ii) pour tout  $t > 0$ , la fonction  $u \mapsto \frac{1 - e^{-ut}}{t(\sqrt{t} + 1)}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ ;
- (iii) pour dominer la fonction, on note que  $u \mapsto 1 - e^{-ut}$  est croissante, d'où

$$\forall a > 0, \forall u \in [0, a], \forall t > 0: 0 \leq \frac{1 - e^{-ut}}{t(\sqrt{t} + 1)} \leq \frac{1 - e^{-at}}{t(\sqrt{t} + 1)},$$

$$\frac{1 - e^{-at}}{t(\sqrt{t} + 1)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{at}{t(\sqrt{t} + 1)} \sim a \quad \& \quad \frac{1 - e^{-at}}{t(\sqrt{t} + 1)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}}.$$

Cela montre que la domination est intégrable et permet d'appliquer le théorème de continuité sur  $[0, a]$ . Ainsi,  $g$  est bien définie et continue sur  $[0, a]$  pour tout  $a > 0$ , donc sur  $\mathbb{R}_+$ .

**36.** On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

- (i) Pour tout  $u > 0$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1 - e^{-ut}}{t(\sqrt{t} + 1)}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ ; cela vient de la domination montrée à la question précédente et du théorème de comparaison.
- (ii) Pour tout  $t > 0$ , la fonction  $u \mapsto \frac{1 - e^{-ut}}{t(\sqrt{t} + 1)}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
- (iii) Pour tout  $u > 0$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1 - e^{-ut}}{t(\sqrt{t} + 1)} \right) = \frac{e^{-ut}}{\sqrt{t} + 1}$  est continue (p.m.) sur  $\mathbb{R}_+$  et

$$\forall a > 0, \forall x \in [a, +\infty[: 0 \leq \frac{e^{-ut}}{\sqrt{t} + 1} \leq \frac{e^{-at}}{\sqrt{t} + 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathfrak{o}(e^{-at}),$$

fonction de référence intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

Le théorème de dérivation s'applique donc sur  $[a, +\infty[$  et  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, +\infty[$  pour tout  $a > 0$ , donc sur  $\mathbb{R}_+^*$  (la question 37 prouvera que  $g$  n'est pas dérivable en 0 et que ce résultat est donc optimal).

Il est alors clair que, pour tout  $u \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $g'(u) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ut}}{\sqrt{t} + 1} dt > 0$ , donc  $g$  est croissante. Cela pouvait aussi s'obtenir directement à partir des variations de  $u \mapsto e^{-ut}$  et la croissance de l'intégrale.

**37.** On pose  $x = ut$  dans l'intégrale définissant  $g$ . Il vient

$$g(u) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ut}}{t(\sqrt{t} + 1)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{u}} + 1 \right)} dx = \sqrt{u} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt{u})} dx = \sqrt{u} h(u).$$

Appliquons le théorème de continuité à  $h$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Les deux premières hypothèses sont clairement vérifiées. Par ailleurs,

$$\forall x > 0, \forall u > 0: 0 \leq \frac{1 - e^{-x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt{u})} \leq \frac{1 - e^{-x}}{x\sqrt{x}} = \tau(x) \quad \& \quad \tau(x) \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \tau(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Ainsi,  $\tau$  est une domination intégrable, le théorème s'applique et  $h$  est continue en 0. Corrélativement,  $g(u) \underset{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}}{\sim} c\sqrt{u}$  avec  $c = h(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x\sqrt{x}} dx$ .

La fonction  $u \mapsto \sqrt{u}$  n'étant pas dérivable en 0 (la limite de son taux d'accroissement à l'origine est infinie), il en va de même pour  $g$ , dont le domaine de dérivabilité est ainsi  $\mathbb{R}_+^*$ .