DMS 5 - 2025-2026, sujet de secours, corrigé

Centrale PSI 2, 2015

I. Résultats préliminaires

I.A. Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et P un polynôme de deux variables tel que $P(x,y)=0$ pour tout $(x,y)\in\Omega$.

I.A.1.a Ω étant ouvert, il existe une boule centrée sur (x,y) de rayon r incluse dans Ω. On a alors

$$I\times J =]x-r/\sqrt{2}, x+r/\sqrt{2}[\times]y-r/\sqrt{2}, y+r/\sqrt{2}[\subset\Omega.$$

En effet, si $(u,v)\in I\times J$ alors $|x-u|<r/\sqrt{2}$ et $|y-v|<r/\sqrt{2}$ et donc $(x-u)^2+(y-v)^2<r$ ce qui montre que $I\times J\subset D((x,y),r)\subset\Omega$.

Sans calcul, il est aussi possible de dire que, dans $\mathbb{R}^2$, la norme euclidienne (qui est la norme imposée par l'énoncé) et la norme infinie sont équivalentes et définissent la même notion d'ouvert. Or, les boules de $\mathbb{R}^2$ relativement à la norme infinie sont des produits d'intervalles de même longueur, d'où l'existence de I et J.

I.A.1.b P étant un polynôme de deux variables, on peut l'écrire (pour un certain n)

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon P(x,y)=\sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2\\ i+j\leqslant n}}\alpha_{k,l}x^ky^l=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{n-k}\alpha_{k,l}y^l\right)x^k=\sum_{k=0}^{n}Q_k(y)x^k\quad\text{avec}\quad\forall k,\ Q_k\in\mathbb{R}[X].$$

D'après ce qui précède, pour $y\in J$ fixé, $x\mapsto P(x,y)$ est la fonction nulle sur I. Comme c'est une fonction polynomiale et que I est infini, c'est la fonction polynomiale nulle. Ainsi (un polynôme d'une variable est nul quand ses coefficients le sont)

$$\forall k\in[\![0,d]\!],\ \forall y\in J\colon Q_k(y)=0.$$

De la même façon, Q_k est le polynôme nul et tous les coefficients $\alpha_{k,l}$ le sont. P est donc le polynôme nul.

I.A.2 $P(x,y)=x^2+y^2-1$ est nul sur le cercle unité, qui possède une infinité d'éléments, mais n'est pas le polynôme nul. Le résultat précédent ne subsiste donc pas avec la seule hypothèse « Ω infini ».

I.B.1 Par définition, $\mathcal{P}_m$ est l'espace vectoriel engendré par la famille $(f_{k,l}\colon(x,y)\mapsto x^ky^l)_{\substack{k,l\in\mathbb{N}\\ k+l\leqslant m}}$. C'est donc bien un espace vectoriel, de dimension finie... La famille génératice trouvée est libre (puisqu'un polynôme n'est nul que si tous ses coefficients le sont). Elle forme une base de $\mathcal{P}_m$ et la dimension de l'espace est donc (pour chaque valeur de $k\in[\![0,m]\!]$, on a $m-k+1$ choix possibles pour l)

$$\dim(\mathcal{P}_m)=\#\{(k,l)\in\mathbb{N}^2\,;\ k+l\leqslant m\}=\sum_{k=0}^{m}(m-k+1)=\sum_{j=1}^{m+1}j=\frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

I.B.2 Il est clair que tout polynôme de degré 1 est harmonique. Ainsi, $P(x,y)=2x$ convient. Ce n'est évidemment plus le cas pour ceux de degré 2. Posons $P_2(x,y)=x^2-y^2$. On a alors $\partial_{1,1}P_2(x,y)=2$ et $\partial_{2,2}P_2(x,y)=-2$, ce qui montre que P_2 est harmonique.

I.B.3.a $P\mapsto\Delta P$ est une application linéaire (linéarité de la dérivation partielle) et l'ensemble des polynômes harmonique est l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\Delta)\cap\mathcal{P}$ (une intersection de sous-espaces est un sous-espace).

I.B.3.b D'après le théorème du rang,

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}=\dim(\mathcal{P}_m)=\dim(\mathrm{Ker}(\Delta_m))+\dim(\mathrm{Im}(\Delta_m))$$

Or, de façon immédiate, $\mathrm{Im}(\Delta_m)\subset\mathcal{P}_{m-2}$ (quand on dérive partiellement deux fois, on perd au moins deux degrés). Ainsi,

$$\dim(\mathrm{Im}(\Delta_m))\leqslant\frac{(m-1)m}{2}\quad\therefore\quad\dim(\mathrm{Ker}(\Delta_m))\geqslant\frac{(m+1)(m+2)}{2}-\frac{(m-1)m}{2}=2m+1.$$

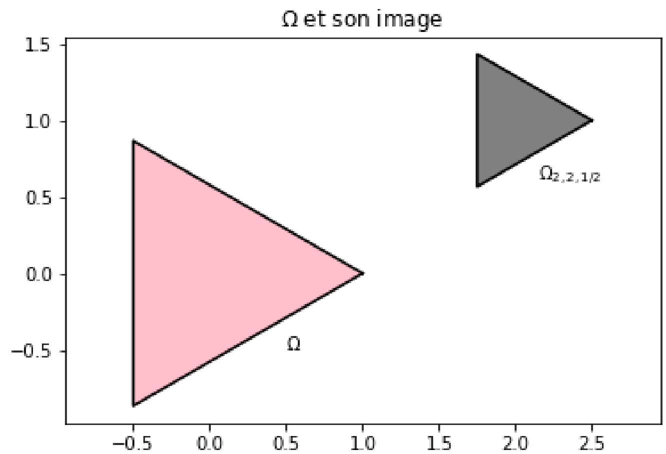
I.B.3.c Comme $\mathrm{Ker}(\Delta_m)\subset\mathrm{Ker}(\Delta)$ pour tout m, on peut en déduire que l'espace vectoriel des polynômes harmoniques est de dimension infinie.

IC.1 Posons $H(x,y) = xy$. Alors, H est un polynôme harmonique qui est partout égal à $f\colon (x,y) \mapsto xy$.

IC.2 On factorise $f(x,y) = x^4 - y^4 = (x^2-y^2)(x^2+y^2)$. Ainsi, f coïncide avec $H(x,y) = x^2 - y^2$ sur $\mathcal{C}$ et H est harmonique. On peut aussi penser à prendre $H(x,y) = x^4 - y^4 + (1-x^2-y^2)(x^2-y^2)$... après avoir fait la partie IV.

II. Quelques exemples d'applications harmoniques

II.A $\Omega_{x_0,y_0,\lambda}$ est l'image de Ω par l'homothétie de rapport λ composée avec la translation de vecteur (x_0,y_0). Dans le cas proposé, on obtient le dessin suivant :



II.B.1 Comme $\partial i f$ est de classe C^2, on peut lui appliquer le théorème de Schwarz qui indique que l'on peut permuter les dérivées partielles. On a ainsi $\Delta(\partial_i f) = \partial_i(\Delta f)$. Quand f est harmonique, $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ le sont donc aussi.

II.B.2 Comme il a été indiqué plus haut,

$$\Omega_{x_0,y_0,\lambda} = \varphi(\Omega) \quad \text{avec} \quad t_{(x_0,y_0)} \circ h_\lambda(\Omega),$$

où t_u est la translation de vecteur u et $h_\lambda = \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ est l'homothétie de rapport λ. Notons alors que φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et que, pour $v \in \mathbb{R}^2$ et $\eta > 0$, $\varphi\big(B(v,\eta)\big) = B(\varphi(v), |\lambda|\eta)$. Soit alors $w \in \Omega_{x_0,y_0,\lambda}$. Posons $v = \varphi^{-1}(w) \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe une boule $B(v,\eta) \subset \Omega$, d'où $\varphi\big(B(v,\eta)\big) = B(w,|\lambda|\eta) \subset \phi(\Omega) = \Omega_{x_0,y_0,\lambda}$, ce qui montre que $\Omega_{x_0,y_0,\lambda}$ est ouvert.

Alternativement, $\Omega_{x_0,y_0,\lambda} = \varphi^{-1}(\Omega)$ est l'image réciproque de Ω par l'application continue $\varphi^{-1} = h_{\lambda^{-1}} \circ t_{-(x_0,y_0)}$, donc est ouvert.

II.B.3 Posons $h(x,y) = g(\lambda(x,y) + (x_0,y_0)) = g(\lambda x + x_0, \lambda y + y_0$. Quand g est de classe C^2, h l'est aussi et une application de la règle de la chaîne donne

$$\partial_{i,i} h(x,y) = \lambda^2 \partial_{i,i} g(\lambda(x,y) + (x_0,y_0)).$$

Ainsi, le caractère harmonique de g entraîne immédiatement celui de h.

II.C.1 Les fonctions h_1 et h_2 sont de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par théorèmes d'opérations. De plus,

$$\partial_1 h_1(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \partial_{1,1} h_1(x,y) = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \partial_2 h_1(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad \partial_{2,2} h_1(x,y) = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

d'où $\Delta(h_1) = 0$, c'est-à-dire h_1 harmonique. En remarquant que $h_2 = \dfrac{1}{2}\partial_1 h_1$, on en déduit avec les questions précédentes que h_2 est aussi harmonique.

II.C.2 Notons φ_t l'application proposée. Alors,

$$\varphi_t(x,y) = \frac{1 - [x^2 + y^2 + 2x\cos t + 2y\sin t + \cos^2 t + \sin^2 t]}{x^2+y^2} \qquad \therefore \qquad \varphi_t = -1 - \cos(t)\partial_1 h_1 - \sin(t)\partial_2 h_1,$$

qui est harmonique comme combinaison linéaire de fonctions harmoniques.

II.D.1 On remarque, en utilisant les notations introduites en question précédente, que
$$N_t(x,y) = \varphi_t(x-\cos(t), y-\sin(t)).$$
On est dans le cas de la question II.B.3 avec $\lambda = 1$, $(x_0, y_0) = (-\cos(t), -\sin(t))$ et $g = \varphi_t$. Cette question indique que N_t est harmonique sur l'image Ω de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $(x,y) \mapsto (x+\cos(t), y+\sin(t))$ c'est à dire sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\cos(t), \sin(t))\}$. Le disque $D(0,1)$ étant inclus dans Ω, N_t est harmonique sur $D(0,1)$.

II.D.2 Comme $(\cos t, \sin t) \notin D(0,1)$, la fonction $t \mapsto N(x,y,t)$ est de classe C^∞ sur son domaine.

II.D.3 À l'aide de quelques manipulations, on obtient la décomposition demandée avec $\alpha = \beta = 1$:
$$N(x,y,t) = \frac{1-|z|^2}{|z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|^2} = \frac{1-|z|^2}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})(\overline{z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \frac{1-|z|^2}{(1-z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})(1-\overline{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}$$
$$= \frac{1-z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}+1-\overline{z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}-(1-z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}-\overline{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+|z|^2)}{(1-z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})(1-\overline{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} = \frac{1}{1-\overline{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} + \frac{1}{1-z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} - 1.$$

II.D.4 En utilisant le DSE de $(1+u)^{-1}$, qui est de rayon de convergence 1, et comme $|z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}| = |z| < 1$, on a
$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad \frac{1}{1-z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}.$$
Soit $f_k \colon t \mapsto z^k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}$. Alors, $(f_k)_k$ est une suite de fonctions continues sur $[0, 2\pi]$ et $\|f_k\|_{[0,2\pi],\infty} = |z|^k$ est le terme général d'une série convergente (géométrique de raison $|z| < 1$). $\sum f_k$ est ainsi normalement (donc uniformément) convergente sur le segment $[0, 2\pi]$. On est dans un des cas d'interversion somme-intégrale et l'on peut écrire
$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1-z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = 2\pi,$$
toutes les intégrales étant nulles sauf celle pour $k = 0$. En conjuguant, il vient $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1-\overline{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = 2\pi$, d'où *in fine*, en reprenant l'expression de $N(x,y,t)$ obtenue à la question précédente, $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(x,y,t)\,\mathrm{d}t = 1+1-\frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

III. Problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$

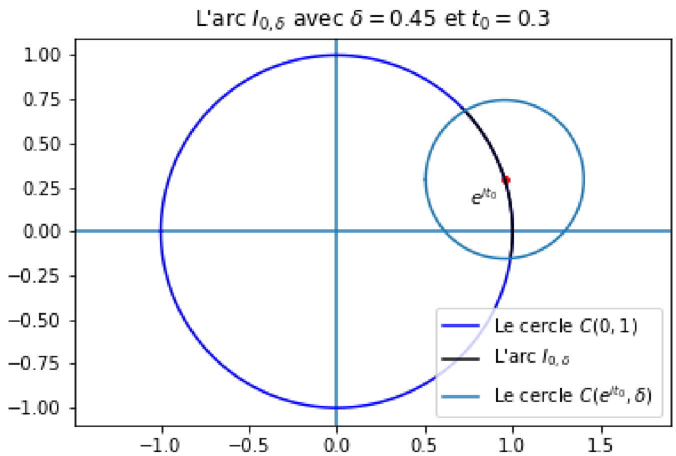
III.A.1.a Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres. Ici, y est fixé et l'on pose $g(x,t) = N(x,y,t)f(\cos(t), \sin(t))$ pour $t \in [0, 2\pi]$ et $x \in I_y = \{x \in \mathbb{R};\ x^2+y^2 < 1\}$.

- Pour tout $x \in I_y$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$ et donc intégrable sur ce segment.
- La fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I_y et ses dérivées sont
$$x \mapsto \partial_1 N_t(x,y) f(\cos(t), \sin(t)) \quad \text{et} \quad x \mapsto \partial_{1,1} N_t(x,y) f(\cos(t), \sin(t)).$$
- Pour tout $x \in I_y$, $t \mapsto \partial_1 N_t(x,y) f(\cos(t), \sin(t))$ et $t \mapsto \partial_{1,1} N_t(x,y) f(\cos(t), \sin(t))$ sont continues sur $[0, 2\pi]$.
- Soit $[a,b] \subset I_y$. Les applications $(x,t) \mapsto \partial_1 N_t(x,y) f(\cos(t), \sin(t))$ et $(x,t) \mapsto \partial_{1,1} N_t(x,y) f(\cos(t), \sin(t))$ sont continues sur le fermé-borné $[a,b] \times [0, 2\pi]$. On peut donc les majorer sur ce fermé-borné par des constantes. Les majorants sont indépendants de x et intégrables que $[0, 2\pi]$ (une fonction constante est intégrable sur un segment).

Le théorème s'applique et permet d'affirmer que N_f admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 par rapport à sa première variable. Ces dérivées s'obtiennent en dérivant partiellement sous l'intégrale. De façon plus générale,
$$\partial_{i,j} N_f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_{i,j} N_t(x,y) f(\cos(t), \sin(t))\,\mathrm{d}t.$$
Cela est vrai pour tout $(x,y) \in D(0,1)$ et pour tous $i,j \in \{1,2\}$, la même preuve permettant de conclure pour tout type de dérivation partielle à tout ordre. Un abus de notation (au vu des notations du préambule, qui se contente de parler de fonctions de deux variables) donne $\partial_{i,j} N_t(x,y) = \partial_{i,j} N(x,y,t)$ et la formule de l'énoncé.

III.A.1.a En particulier, le caractère harmonique de N_t et la linéarité du passage à l'intégrale donnent le caractère harmonique de u, qui est égale à N_f sur $D(0,1)$.

III.A.2.a Pour visualiser la situation, on considère le point $M(t_0) = (\cos(t_0), \sin(t_0))$ d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0}$ sur le cercle unité $C(0,1)$. On s'intéresse alors à l'intersection de la boule $\overline{D}(M(t_0), \delta)$ avec $C(0,1)$. C'est un arc du cercle unité, et le cercle en entier pour $\delta \geqslant 2$.



Plus précisément, en posant $\xi = 2\arcsin(\delta/2)$ et en supposant dorénavant que $\delta < 2$,

$$\big\|(\cos t, \sin t) - (\cos t_0, \sin t_0)\big\|_2 = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0}\right| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t-t_0}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t-t_0}{2}}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{t-t_0}{2}\right)\right| \qquad \therefore$$

$$\forall t \in \mathbb{R}\colon \|(\cos t, \sin t) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leqslant \delta \iff \left|\sin\left(\frac{t-t_0}{2}\right)\right| \leqslant \frac{\delta}{2} \iff t \in \big[t_0 - \xi, t_0 + \xi\big] \mod (2\pi).$$

Si $\xi \leqslant t_0$, $I_0^\delta = \big[t_0 - \xi, t_0 + \xi\big]$, si $\xi > t_0$, on obtient bien un arc de cercle, mais la contrainte de rester dans $[0, 2\pi]$ donne $I_0^\delta = [2\pi + t_0 - \xi, 2\pi] \cup [0, t_0 + \xi]$.

III.A.2.b Notons $M_0 = (x_0, y_0) = (\cos(t_0), \sin(t_0))$. f étant continue en M_0, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \overline{D}(M_0, \delta),\ |f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi}.$$

Pour tout $t \in I_0^\delta$, et en notant $M(t) = (\cos(t), \sin(t))$, on a alors $|f(M(t)) - f(M(t_0))| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4\pi}$ par définition de I_0^δ et, comme N est une fonction positive,

$$\left|\int_{I_0^\delta} N(x,y,t)(f(M(t)) - f(M(t_0)))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{I_0^\delta} N(x,y,t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_0^{2\pi} N(x,y,t)\,\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2},$$

en utilisant à nouveau la positivité de N est le fait que $I_0^\delta \subset [0, 2\pi]$ par définition.

IIIA.2c Pour $z = x + \mathrm{i}y$, $|z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0}| = \big\|(x,y) - (\cos t_0, \sin t_0)\big\|_2 \leqslant \dfrac{\delta}{2}$ et l'hypothèse $t \notin I_0^\delta$ équivaut à $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0}| > \delta$, d'où, par inégalité triangulaire,

$$|z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| \geqslant |\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0}| - |z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0}| > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} \qquad \therefore \qquad N(x,y,t) = \frac{1 - |z|^2}{|z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|}^2 \leqslant \frac{1 - |z|^2}{(\delta/2)^2} = 4\,\frac{1 - (x^2 + y^2)}{\delta^2}.$$

III.A.2.d La fonction f étant continue sur $\mathcal{C}(0,1)$, qui est fermé et borné, elle est bornée et l'on peut poser $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t \in \mathcal{C}(0,1)} |f(t)|$. Si $\eta \leqslant \delta/2$, la question précédente donne alors

$$\left|\int_{t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x,y,t)(f(M(t)) - f(M_0))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\|f\|_\infty \int_{t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x,y,t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant 2\|f\|_\infty \times 2\pi \times \frac{4}{\delta^2}(1 - x^2 - y^2) = c(1 - x^2 - y^2).$$

Enfin, si $M = (x,y)$ est proche de $M_0 = (\cos(t_0), \sin(t_0))$, alors $x^2 + y^2 = \|M\|^2$ est proche de $\|M_0\|^2 = 1$. Il existe donc η_1 tel que, si $\|M - M_0\| \leqslant \eta_1$, alors $c(1 - (x^2 + y^2)) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ (c est une constante, elle ne dépend que de δ). En posant $\eta = \min(\eta_1, \delta/2)$, on peut alors tout combiner pour obtenir

$$\left|\int_{t\in[0,2\pi]\setminus I_0^\delta} N(x,y,t)(f(M(t)) - f(M_0))\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

III.A.3 On sait que la restriction de u à $\mathcal{C}(0,1)$, qui est égale à f, est continue. Il s'agit donc de montrer que, pour tout $t_0 \in [0, 2\pi]$, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(\cos t_0,\sin t_0)\\(x,y)\in D(0,1)}} u(x,y) = f(x,y)$. Soient donc t_0 et ε. Pour $(x,y) \in D(0,1)$,

$$\left|u(x,y) - f(\cos(t_0), \sin(t_0))\right| = \left|\int_0^{2\pi} N(x,y,t)(f(M(t)) - f(M_0))\,\mathrm{d}t\right|.$$

La question III.A.2.b donne une valeur de δ pour laquelle la question IIIA.2d donne une valeur η. On a alors, en découpant l'intégrale sur I_0^δ et son complémentaire,

$$|u(x,y) - u(\cos(t_0), \sin(t_0))| \leqslant \varepsilon$$

quand $\|(x,y) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\| \leqslant \eta$. On peut conclure que $u \in \mathcal{D}_f$, c'est à dire que u est solution sur le disque unité du problème de Dirichlet associé à f.

III.B.1.a Par hypothèse, u_n admet un maximum local en $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, point intérieur à $D(0,1)$. D'après la question I.A.1.a, $x \mapsto u_n(x, \widetilde{y})$ ne prend que des valeurs supérieures ou égales à $u_n(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ sur un intervalle ouvert contenant $\widetilde{x}$.

Or, si une fonction $g \in \mathcal{C}^2(]a,b[)$ atteint un maximum en c, $g'(c) = 0$ et, par la formule de Taylor-Young, $g(c+h) - g(c) = \dfrac{h^2}{2}g''(c) + \mathfrak{o}(h^2)$ et donc $g''(c) \leqslant 0$ — sinon, $g(c+h) - g(c) \sim_{h\to 0} \dfrac{h^2}{2}g''(c)$ est localement strictement positive ce qui est en contradiction avec la maximalité locale en c. On en déduit que $\partial_1 u_n(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0$ et $\partial_{1,1} u_n(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \leqslant 0$.

III.B.1.b Sachant que u est harmonique, un calcul direct donne

$$\forall (x,y) \in D(0,1)\colon \Delta u_n(x,y) = \frac{4}{n} > 0$$

et la question précédente montre, par l'absurde, que u_n n'admet pas de maximum local sur $D(0,1)$.

IIIB.2 Cependant, u_n étant continue sur le fermé-borné $\overline{D}(0,1)$ admet un maximum sur ce fermé-borné et il est donc atteint en un point de $C(0,1)$ où u_n prend la valeur $1/n$ (car u est nulle sur le cercle). On a ainsi

$$\forall (x,y) \in \overline{D}(0,1)\colon u_n(x,y) \leqslant \frac{1}{n}.$$

III.B.3 Ce qui précède est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On peut, à x, y fixés quelconque, faire tendre n vers l'infini pour en déduire que u est négative sur $\overline{D}(0,1)$. Or, $-u$ est clairement solution du même problème que u et on a donc aussi la positivité de u. Finalement,

$$\forall (x,y) \in \overline{D}(0,1),\ u(x,y) = 0.$$

III.C On a construit un élément u de $\mathcal{D}_f$ (existence d'une solution). Si v est un autre élément, alors $u - v$ est solution de $\mathcal{D}_0$ et est donc nulle d'après la partie III.B. Il y a donc aussi unicité de la solution.

IV. Retour sur les polynômes harmoniques

IV.A.1 La linéarité de ϕ_{m-2} est immédiate par linéarité des opérateurs de dérivation. Si $Q \in \mathcal{P}_{m-2}$ alors $\widetilde{Q} \in \mathcal{P}_m$, d'où $\Delta\widetilde{Q} \in \mathcal{M}_{m-2}$, une dérivation partielle faisant perdre au moins un degré. On en déduit que $\mathrm{Im}(\phi_{m-2}) \subset \mathcal{P}_{m-2}$. Autrement dit, ϕ_{m-2} est un endomorphisme de $\mathcal{P}_{m-2}$.

Soit $Q \in \mathrm{Ker}(\phi_{m-2})$. On a alors $\Delta\widetilde{Q} = 0$. Comme la restriction de $\widetilde{Q}$ à $C(0,1)$ est nulle, $\widetilde{Q}$ est ainsi solution du problème de Dirichlet $\mathcal{D}_0$. D'après III.B, $\widetilde{Q} = 0$. Or, $Q \mapsto (1 - x^2 - y^2)Q$ est injective (elle est linéaire et si $(1 - x^2 - y^2)Q = 0$, alors Q s'annule sur $D(0,1)$ et est nul d'après IA.1). On en déduit que $Q = 0$ et ϕ_{m-2} est donc injective.

IV.A.2 L'application ϕ_{m-2} est un isomorphisme de $\mathcal{P}_{m-2}$ (application linéaire injective d'un espace de dimension dans lui-même, ce qui entraîne la bijectivité). Comme $\Delta(-P) \in \mathcal{P}_{m-2}$, il admet donc un antécédent T par ϕ_{m-2}. On a alors $\Delta\widetilde{T} = \Delta(-P)$ c'est à dire que $P + \widetilde{T}$ est harmonique.

IV.A.3 Le polynôme $u = P + (1-x^2-y^2)T$ est harmonique et est égale à P_C sur le cercle unité. C'est donc une solution de $\mathcal{D}_{P_C}$. Avec III.C, on peut dire que c'est l'unique solution. Et comme $T \in \mathcal{P}_{m-2}$, cette solution est dans $\mathcal{P}_m$.

IV.A.4 On sait par IVA.2 que l'on peut trouver des réels a, b tels que $x^3 + (1-x^2-y^2)T(x,y)$ soit harmonique avec $T(x,y) = ax + by$ (on peut prendre le terme constant nul car $1 - x^2 - y^2$ est harmonique). On obtient facilement $T(x,y) = \dfrac{3}{4}x$. D'après la question précédente, $\mathcal{D}_{P_C} = \left\{(x,y) \mapsto x^3 + \dfrac{3x}{4}(1-x^2-y^2)\right\}$.

IVB.1 L'existence d'une décomposition est donnée par la question IVA.2 (on peut toujours trouver un $m \geqslant 2$ tel que $P \in \mathcal{P}_m$). Supposons que l'on puisse trouver deux décompositions. On a alors H_1, H_2 harmoniques et Q_1, Q_2 polynômes tels que

$$H_1(x,y) + (1-x^2-y^2)Q_1(x,y) = H_2(x,y) + (1-x^2-y^2)Q_2(x,y).$$

Posons $Q = Q_1 - Q_2$; il existe $m \geqslant 2$ tel que $Q \in \mathcal{P}_{m-2}$. La relation précédente donne $\Delta\widetilde{Q} = 0$ et donc $Q \in \operatorname{Ker}(\phi_{m-2})$. Ceci donne (par injectivité) la nullité de Q et donc Q_1 et Q_2. L'égalité $H_1 = H_2$ en découle. On a ainsi prouvé l'unicité de la décomposition.

IV.B.2 Considérons la restriction $\Delta_m\colon \mathcal{P}_m \to \mathcal{P}_{m-2}$, dont le noyau est par définition $\mathcal{H}_m$. Si $P \in \mathcal{P}_{m-2}$, soit $Q = \phi_{m-2}^{-1}(P)$ (on a montré que ϕ_{m-2} est un isomorphisme). Alors, $\Delta_m(\widetilde{Q}) = P$, ce qui montre la surjectivité de Δ_m. La dimension de $\operatorname{Ker}(\Delta_m)$ est alors donnée par le théorème du rang.

On peut aussi montrer que $\mathcal{P}_m = \mathcal{H}_m \oplus (1-x^2-y^2)\mathcal{P}_{m-2}$.

— L'injectivité de ϕ_{m-2} donne le caractère direct de la somme.

— Soit $P \in \mathcal{P}_m$. La question IVA.2 donne $T \in \mathcal{P}_{m-2}$ tel que $H = P + (1-x^2-y^2)T$ soit harmonique. Comme c'est un élément de $\mathcal{P}_m$, $H \in \mathcal{H}_m$. Ainsi,

$$P = H - (1-x^2-y^2)T \in \mathcal{H}_m \oplus (1-x^2-y^2)\mathcal{P}_{m-2}.$$

Comme $T \mapsto (1-x^2-y^2)T$ est injective (IVA.1), $(1-x^2-y^2)\mathcal{P}_{m-2}$ et $\mathcal{P}_{m-2}$ ont même dimension, d'où

$$\dim(\mathcal{H}_m) = \dim(\mathcal{P}_m) - \dim(\mathcal{P}_{m-2}) = 2m+1.$$

Le résultat reste vrai pour $m \in \{0,1\}$ (dans ces deux cas $\mathcal{H}_m = \mathcal{P}_m$).

IV.B.3 Pour trouver une base de $\mathcal{H}_3$, il nous suffit d'exhiber sept polynômes harmoniques de degré au plus trois formant une famille libre. Certains sont immédiats : 1, x, y, xy et $x^2 - y^2$. La question IVA.4 a fourni un polynôme harmonique de degré 3. Par symétrie, on en trouve un dernier. On obtient ainsi une famille de 7 éléments de $\mathcal{H}_3$ dont on vérifie aisément l'indépendance.

$$\mathcal{H}_3 = \operatorname{Vect}\left(1,\, x,\, y,\, xy,\, x^2-y^2,\, x^3 + \frac{3x}{4}(1-x^2-y^2),\, y^3 + \frac{3y}{4}(1-x^2-y^2)\right).$$

IV.C.1 L'application $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \longmapsto \{i_1, i_1 + i_2 + 1, \ldots, i_1 + \cdots + i_{n-1} + n - 2\}$ réalise une bijection de $\{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n\,;\ i_1 + i_2 + \cdots + i_n = m\}$ sur l'ensemble des parties de $[\![0, m+n-2]\!]$ à $n-1$ éléments : l'énumération est strictement croissante donc donne bien une partie à $n-1$ éléments et $i_1 + \cdots + \imath_{n-1} \leqslant m$ et la bijection réciproque est donnée par

$$(j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-1}) \longmapsto (j_1, j_2 - j_1 - 1, \ldots, j_{n-1} - j_{n-2} - 1, m + n - 2 - j_{n-1}).$$

Il y a donc $\dbinom{m+n-1}{n-1} = \dbinom{m+n-1}{m}$ éléments dans ces deux ensembles, le premier comptant les monômes de degré m. On peut alors compter les nombre d'éléments de la base « canonique » de $\mathcal{P}_m$:

$$\dim(\mathcal{P}_m) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-1}{k}.$$

IV.C.2 Le raisonnement de IV.B.2 donne cette fois $\mathcal{P}_m = \mathcal{H}_m \oplus (1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2)\mathcal{P}_{m-2}$, d'où

$$\dim(\mathcal{H}_m) = \dim(\mathcal{P}_m) - \dim(\mathcal{P}_{m-2}) = \binom{n+m-1}{m} + \binom{n+m-2}{m-1}.$$