

Processus de Poisson

On considère un processus ponctuel se déroulant sur la droite réelle, sur laquelle on distribue des points. Cela peut modéliser la survenue d'événements à un certain moment, la droite réelle représentant le temps et un point, un événement (un appel à un standard téléphonique, par exemple). Pour $a \leq b$, on note $N_{a,b}$ la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui donne le nombre de points figurant dans l'intervalle $[a, b[$; en particulier, $N_{a,a}$ est certaine égale à 0. On donne un réel λ strictement positif. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_k(t) = \mathbf{P}(N_{0,t} = k)$. On suppose les hypothèses suivantes vérifiées :

- (i) La loi de $N_{a,b}$ ne dépend que de $b - a$ (invariance par translation).
- (ii) $[a, b[\cap [c, d[= \emptyset \implies N_{a,b}$ et $N_{c,d}$ sont indépendantes (survenue indépendante des événements modélisés).
- (iii) f_0 est continue à droite en 0.

0. Une reformulation de (iii).

a. Que peut-on dire des événements $(N_t = 0)$ et $(N_{t'} = 0)$ si $t < t'$? Montrer que $A = \bigcup_{t>0} (N_t = 0)$ est un événement.

b. Montrer que $\bigcap_{t>0} (N_t > 0)$ est un événement et que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{t>0} (N_t > 0)\right) = 1 - \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t>0}} f(t)$.

c. En déduire que f_0 est continue en 0 si, et seulement si, l'événement A est presque sûr.

1. Une relation de récurrence.

a. Que vaut $f_k(0)$?

b. On considère trois réels $a < b < c$. Donner une relation simple entre les variables aléatoires $N_{a,b}$, $N_{b,c}$ et $N_{a,c}$. En déduire, pour tout triplet $(k, t, h) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, la relation

$$f_k(t+h) = \sum_{j=0}^k f_j(t) f_{k-j}(h). \quad (1)$$

2. Le cas $k = 0$.

a. Que donne la relation (1) pour $k = 0$? Montrer que f_0 est continue à droite en tout point $t \geq 0$, puis que f_0 est continue à gauche en tout point $t > 0$.

b. En intégrant la relation (1) pour $k = 0$ entre 0 et 1 par rapport à h , montrer en utilisant une récurrence que la fonction f_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

c. Déduire de (1) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f_0 . La résoudre et donner f_0 en fonction de $\alpha_0 = f'_0(0)$. Quel est le signe de α_0 ? Que se passe-t-il si $\alpha_0 = 0$? En particulier, que valent alors les fonctions f_k pour $k \geq 1$? On exclut ce cas sans intérêt dans la suite du problème.

3. Dans les questions 3 et 4, on s'intéresse au cas $k \geq 1$.

a. Montrer que f_k est continue à droite en 0 (cela n'utilise pas la relation (1)).

b. Montrer que f_k est continue sur son domaine de définition (on pourra, comme pour $k = 0$, utiliser la relation (1) et distinguer continuité à droite et à gauche).

c. En s'inspirant de la méthode suivie en 2.b, montrer que les fonctions f_k sont de classe $\mathcal{C}^\infty$).

4. On fait, dans l'ensemble de la question 4, l'hypothèse supplémentaire suivante :

(iv) $\mathbf{P}(N_{0,t} \geq 2) = o(t)$ quand t tend vers 0.

a. On pose $\lambda = -\alpha_0$. Montrer que $f_1(t) \sim \lambda t$ quand t tend vers 0. Donner un développement limité de f_k en 0 à l'ordre 1 pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b. En utilisant (1), en déduire que, pour tout $k \geq 1$, f_k est solution de l'équation différentielle linéaire $f'_k + \lambda f_k = \lambda f_{k-1}$.

c. On rappelle que $f_0(t) = e^{-\lambda t}$. Calculer f_1 et f_2 . Conjecturer la forme de f_k et démontrer cette conjecture. Reconnaître la loi de $N_{0,t}$.

5. On abandonne l'hypothèse (iv) (mais on garde bien sûr les trois premières). Soit $G(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) x^k$.

a. Interpréter la fonction $x \mapsto G(t, x)$. En déduire que $G(t, x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+ \times]-1, 1[$.

b. Justifier que f_k admet un développement limité à tout ordre en 0 et que, pour tout $k \geq 1$, l'on peut écrire, quand t tend vers 0, $f_k(t) = \alpha_k t + o(t)$ avec $\alpha_k \geq 0$.

c. En utilisant (1), montrer que $f'_k(t) = \sum_{j=0}^k \alpha_j f_{k-j}(t)$. Établir sur le domaine $\mathbb{R}_+ \times]-1, 1[$ une équation aux dérivées partielles $\frac{\partial G}{\partial t}(t, x) = A(x)G(t, x)$ (on donnera $A(x)$ sous la forme d'une série entière, dont on montrera qu'elle est de rayon de convergence au moins égal à 1).

d. En déduire que $G(t, x) = e^{tA(x)}$. Exprimer l'espérance et la variance de $N_{0,t}$ en fonction de A .

e. Retrouver la loi de $N_{0,t}$ sous l'hypothèse (iv) telle qu'obtenue à la question 4.c.

6. Dans cette question, on donne une justification de (iv). On note $G = G_{N_{0,1}}$ la série génératrice de $N_{0,1}$ et l'on suppose que $N_{0,1}$ admet un moment d'ordre 2.

a. On raisonne dans cette question sachant l'événement $(N_{0,1} = n)$. L'intervalle $[0, 1[$ compte alors n points exactement. On suppose que les abscisses de ces points sont indépendantes et sont uniformément réparties sur l'intervalle $[0, 1]$. Justifier alors que, si $t \in]0, 1[$, $N_{0,t}|_{N_{0,1}=n} \sim \mathcal{B}(n, t)$.

b. En déduire que $\mathbf{P}(N_{0,t} = 0) = G(1 - t)$ et $\mathbf{P}(N_{0,t} = 1) = tG'(1 - t)$. Démontrer alors (iv).