

## Processus de Poisson

**0.a.** Il est clair que, si  $t < t'$ , on a  $(N_t = 0) \supset (N_{t'} = 0)$  : si le segment  $[0, t']$  ne contient aucun point, alors il en va de même *a fortiori* de  $[0, t] \subset [0, t']$ . Si  $(N_t = 0)$  est un événement par hypothèse, il n'est pas évident que  $A = \bigcup_{t>0} (N_t = 0)$  en soit un car il s'agit d'une réunion non dénombrable. Toutefois, la propriété

de croissance montre que, si  $t > 0$ , et  $n = \lceil 1/t \rceil$ , alors  $1/n < t$ , d'où  $(N_t = 0) \subset (N_{1/n} = 0)$ . Il s'ensuit l'inclusion de droite de

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (N_{1/n} = 0) \subset \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+^*} (N_t = 0) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (N_{1/n} = 0),$$

d'où l'égalité, l'inégalité de gauche étant évidente du fait que  $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}_+^*$ . Ainsi,  $A$  est une réunion dénombrable d'événements, donc un événement.

**0.b.**  $\bigcap_{t>0} (N_t > 0) = \overline{A}$  est un événement. De plus, la question précédente et le théorème sur la probabilité d'une intersection décroissante assurent que

$$\bigcap_{t>0} (N_t > 0) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (N_{1/n} > 0) \quad \therefore \quad \mathbf{P} \left( \bigcap_{t>0} (N_t > 0) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(N_{1/n} > 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - f(1/n)].$$

Or,  $f$  est monotone (croissante) donc  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t>0} f(1/n)$ .

**0.c.** D'après l'hypothèse  $N_{a,a} = 0$ ,  $f_0(0) = 1$ , donc  $f_0$  est continue en 0 si, et seulement si,  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1$  donc si, et seulement si,  $\mathbf{P}(\overline{A}) = 0$ , soit  $\mathbf{P}(A) = 1$ .

**1.a.** Par hypothèse sur  $N_{a,a}$ ,  $N_{0,0} = 0$  p.s., donc, en utilisant le symbole de Kronecker,  $f_k(0) = \delta_{k,0}$ .

**1.b.** Pour  $a < b < c$ , les intervalles  $[a, b[$  et  $[b, c[$  sont disjoints. Cela entraîne la relation  $N_{a,b} + N_{b,c} = N_{a,c}$ . En prenant  $a = 0$ ,  $b = t$  et  $c = t + h$ , on en déduit la relation entre les événements

$$(N_{0,t+h} = k) = \bigoplus_{j=0}^k \left[ (N_{0,t} = j) \cap (N_{t,t+h} = k - j) \right].$$

En passant aux probabilités, on utilise l'incompatibilité des événements dont on prend la probabilité, l'indépendance des v.a.  $N_{0,t}$  et  $N_{t,t+h}$  et, enfin, l'hypothèse (i) d'invariance par translation, ce qui donne

$$\begin{aligned} f_k(t+h) &= \mathbf{P}(N_{0,t+h} = k) = \sum_{j=0}^k \mathbf{P}(N_{0,t} = j) \mathbf{P}(N_{t,t+h} = k - j) \\ &= \sum_{j=0}^k \mathbf{P}(N_{0,t} = j) \mathbf{P}(N_{0,h} = k - j) = \sum_{j=0}^k f_j(t) f_{k-j}(h). \end{aligned}$$

**2.a.** Pour  $k = 0$ , la relation (1) devient  $f_0(t+h) = f_0(t)f_0(h)$ . En fixant  $t$  et en faisant tendre  $h$  vers 0 par valeurs positives, l'hypothèse (iii) montre alors immédiatement que  $f_0$  est continue à droite en tout point  $t \geq 0$ . De plus, si  $t$  est strictement positif et  $0 < h < t$ , la relation (1) donne

$$f_0(t) = f_0(t-h)f_0(h) \quad \therefore \quad f_0(t-h) = \frac{f_0(t)}{f_0(h)} \xrightarrow[h>0]{h \rightarrow 0} f_0(t),$$

d'où la continuité à gauche de  $f_0$  au point  $t$ .

**2.b.** Notons  $F_0$  une primitive de la fonction continue  $f_0$ . On intègre la relation  $f_0(t+h) = f_0(t)f_0(h)$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  par rapport à  $h$ ; il vient

$$F_0(t+1) - F_0(t) = f_0(t) \int_0^1 f_0(h) dh.$$

Pour que le raisonnement à venir soit correct, il est indispensable de noter que  $\int_0^1 f_0(h) dh \neq 0$ . En effet,  $f_0$  est positive (c'est une probabilité) et non nulle au moins sur un intervalle  $[0, \varepsilon]$  de par  $f_0(0) = 1$  et la continuité de  $f_0$  en 0. On sait déjà que  $f_0$  est continue (*i.e.* de classe  $\mathcal{C}^0$ ). Supposons que  $f_0$  soit de classe  $\mathcal{C}^j$ . Alors,  $F_0$  est de classe  $\mathcal{C}^{j+1}$ , donc  $t \mapsto F_0(t+1) - F_0(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^{j+1}$  et  $f_0$  également, ce qui termine la récurrence.

**2.c.** La relation  $f_0(t+h) = f_0(t)f_0(h)$  donne

$$\frac{f_0(t+h) - f_0(t)}{h} = f_0(t) \frac{f_0(h) - 1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f_0'(0)f(t) = \alpha_0 f(t).$$

Ainsi,  $f_0$  est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du type  $y' = \alpha_0 y$ , ce qui s'intègre en  $f_0(t) = Ce^{\alpha_0 t}$ . Comme  $f_0(0) = 1$ , il vient  $C = 1$ , d'où  $f_0(t) = e^{\alpha_0 t}$ . Or,  $f_0(t) \in [0, 1]$  pour tout  $t$  (c'est une probabilité) donc  $\alpha_0 \leq 0$ . Enfin,  $\alpha_0 = 0$  équivaut à  $f_0(t) = 1$  pour tout  $t$ ; autrement dit, on ne distribue aucun point sur la droite; en ce cas,  $f_k$  est la fonction nulle pour tout  $k \geq 1$ . On suppose donc dans la suite que  $\alpha_0 < 0$ .

**3.a.** Pour  $k \geq 1$  et  $t > 0$ , on a  $(N_{0,t} = k) \subset (N_{0,t} \geq 1)$ , d'où

$$0 \leq f_k(t) = \mathbf{P}(N_{0,t} = k) \leq \mathbf{P}(N_{0,t} \geq 1) = 1 - f_0(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 = f_k(0),$$

donc  $f_k$  est continue en 0.

**3.b.** On raisonne par récurrence forte sur  $k$ . On a déjà vu que  $f_0$  est continue à la question 2. Supposons que les fonctions  $f_j$  le soient pour tout  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ .

Soit  $t \geq 0$ . On soustrait  $f_k(t)$  à la relation (1), puis l'on applique les résultats des questions 2.a et 3.a donnant la limite de  $f_k$  en 0. Pour  $h > 0$ , il vient

$$f_k(t+h) - f_k(t) = \underbrace{(f_0(h) - 1)}_{\substack{\text{tend vers } 0 \\ \text{quand } h \rightarrow 0}} f_k(t) + \sum_{j=0}^{k-1} f_j(t) \underbrace{f_{k-j}(h)}_{\substack{\text{tend vers } 0 \\ \text{quand } h \rightarrow 0}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

d'où la continuité à droite en 0. De même, si  $t > 0$  et  $0 < h < t$ , en appliquant les majorations triviales

$$0 \leq f_j(t-h) = \mathbf{P}(N_{0,t-h} = j) \leq 1, \text{ on a, en partant de la relation (1) réécrite en } f_k(t) = \sum_{j=0}^k f_j(t-h)f_{k-j}(h) :$$

$$\begin{aligned} |f_k(t) - f_k(t-h)| &\leq |(f_0(h) - 1)f_k(t-h)| + \sum_{j=0}^{k-1} |f_j(t-h)f_{k-j}(h)| \\ &\leq (1 - f_0(h)) + \sum_{j=0}^{k-1} f_{k-j}(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Finalement,  $f_k$  est continue à droite et à gauche, donc  $f_k$  est continue.

**3.c.** Notons  $F_k$  une primitive de la fonction continue  $f_k$ . On intègre la relation (1) sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Cela donne

$$F_k(t+1) - F_k(t) = f_k(t) \int_0^1 f_0(h) dh + \sum_{j=0}^{k-1} f_j(t) \int_0^1 f_{k-j}(h) dh = c_k f_k(t) + \sum_{j=0}^{k-1} c_j f_j(t),$$

où  $(c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ ,  $c_k$  étant non nul (il vaut  $\alpha^{-1}(e^{\alpha_0} - 1)$ , mais on a seulement besoin de  $c_k \neq 0$ ).

On raisonne maintenant par récurrence sur  $k$  à partir de l'hypothèse  $\mathcal{H}_k : f_j$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ . L'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  est vraie d'après la question 2.b. Supposons que  $\mathcal{H}_{k-1}$  soit vraie. Alors, le terme  $\sum_{j=0}^{k-1} c_j f_j(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . On peut alors raisonner comme à la question 2.b en introduisant une deuxième récurrence  $\mathcal{P}_j : f_k$  est de classe  $\mathcal{C}^j$ . D'après la question précédente,  $\mathcal{P}_0$  est vraie. Si  $\mathcal{P}_{j-1}$  l'est,  $f_k$  est donc de classe  $\mathcal{C}^{j-1}$ . Alors,  $F_k$  est de classe  $\mathcal{C}^j$ , donc  $t \mapsto F_k(t+1) - F_k(t)$  également et  $c_k f_k$ , qui est la différence de cette fonction et de  $\sum_{j=0}^{k-1} c_j f_j(t)$ , laquelle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , est donc de classe  $\mathcal{C}^j$ . Comme  $c_k \neq 0$ ,  $f_k$  est de classe  $\mathcal{C}^j$ , donc  $\mathcal{P}_j$  est vraie, ce qui termine la démonstration.

**4.a.** La variable aléatoire  $N_{0,t}$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On a donc  $\mathbf{P}(N_{0,t} = 0) + \mathbf{P}(N_{0,t} = 1) + \mathbf{P}(N_{0,t} \geq 2) = 1$ . Autrement dit,  $f_0(t) + f_1(t) + \mathbf{P}(N_{0,t} \geq 2) = 1$ , égalité dont un développement limité en 0 à l'ordre 1 donne — sous l'hypothèse (iv) —  $f_1(t) = 1 - (1 + \alpha_0 t + o(t)) - o(t) \sim -\alpha_0 t = \lambda t$  car  $\alpha_0 \neq 0$ .

On a déjà  $f_0(t) = 1 - \lambda t + o(t)$  et  $f_1(t) = \lambda t + o(t)$ . Pour  $k \geq 2$ , l'inclusion  $(N_{0,t} = k) \subset (N_{0,t} \geq 2)$  donne  $0 \leq f_k(t) \leq \mathbf{P}(N_{0,t} \geq 2) = o(t)$ , d'où  $f_k(t) = o(t)$ .

**4.b.** On reporte ces développements limités dans (1). Pour  $k \geq 1$ , à  $t$  fixé et  $h > 0$ , on a

$$\begin{aligned} f_k(t+h) &= f_0(h)f_k(t) + f_1(h)f_{k-1}(t) + \sum_{j=0}^{k-2} f_j(h)f_{k-j}(t) \\ &= (1 - \lambda h + o(h))f_k(t) + (\lambda h + o(h))f_{k-1}(t) + \sum_{j=0}^{k-2} f_{k-j}(t) \times o(h) \\ &= f_k(t) + \lambda h(f_{k-1}(t) - f_k(t)) + o(h). \end{aligned}$$

De manière équivalente,  $(f'_k)_d(t) = \lambda(f_{k-1}(t) - f_k(t))$ . Or, on a montré à la question 3.c que  $f_k$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ; en particulier,  $f_k$  est dérivable et la dérivée à droite de  $f_k$  est sa dérivée, ce qui donne bien  $f'_k(t) + \lambda f_k(t) = \lambda f_{k-1}(t)$ .

**4.c.** D'après la question 4.b et le calcul de  $f_0$  fait en 2.c,  $f_1$  vérifie l'équation  $f'_1(t) + \lambda f_1(t) = \lambda f_0(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ . L'équation homogène se résout en  $y(t) = C_1 e^{-\lambda t}$ . La méthode de variation de la constante conduit à chercher une solution de l'équation sous la forme  $C_1(t)e^{-\lambda t}$ , ce qui donne  $C'_1(t) = \lambda$ , soit  $C_1(t) = \lambda t + \mu$  et  $f_1(t) = (\lambda t + \mu)e^{-\lambda t}$ ; comme  $f_1(0) = 0$ , on a  $\mu = 0$ , d'où  $f_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ . On peut alors calculer  $f_2$ , qui vérifie  $f'_2(t) + \lambda f_2(t) = \lambda f_1(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$ . L'équation homogène est la même, d'où  $f_2(t) = C_2(t)e^{-\lambda t}$ . Il vient  $C'_2(t) = \lambda^2 t$ , d'où  $f_2(t) = \left(\frac{\lambda^2}{2} t^2 + \mu\right) e^{-\lambda t}$ , soit, comme  $f_2(0) = 0$ ,  $f_2(t) = \frac{\lambda^2}{2} t^2 e^{-\lambda t}$ .

À l'étape suivante, on va effectuer un calcul similaire, ce qui va introduire par intégration un terme  $\frac{\lambda^3}{6} t^3$  devant l'exponentielle. Il est ainsi raisonnable de poser comme hypothèse de récurrence :  $f_k(t) = \frac{\lambda^k}{k!} t^k e^{-\lambda t}$ . Si cette formule est vraie à l'ordre  $k-1$ , on vérifie immédiatement que la fonction  $f_k$  est solution du problème de Cauchy  $y' + \lambda y = \lambda f_{k-1}$ ,  $y(0) = 0$ , d'où l'identification par unicité de la solution à ce problème.

On reconnaît une loi de Poisson :  $\forall t > 0$  et  $\forall k \in \mathbb{N}$ , on a  $\mathbf{P}(N_{0,t} = k) = \frac{\lambda^k t^k}{k!} e^{-\lambda t}$ , soit  $N_{0,t} \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ .

**5.a.** À  $t$  fixé,  $G(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(N_{0,t} = k) x^k$  est la série génératrice de la variable aléatoire à valeurs entières  $N_{0,t}$ . Le rayon de convergence de cette série est donc au moins égal à 1, ce qui montre que  $G$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+ \times ]-1, 1[$ .

**5.b.** On a vu à la question 3.c que les fonctions  $f_k$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Elles admettent donc un développement limité à tout ordre, en 0 comme ailleurs, donné par la formule de Taylor-Young. En particulier, à l'ordre 1, il existe une constante  $\alpha_k = f'_k(0)$  telle que  $f_k(t) = f_k(0) + \alpha_k t + o(t) = \alpha_k t + o(t)$ , vu que  $f_k(0) = 0$  pour  $k \geq 1$ . Enfin,  $f_k(t) = \mathbf{P}(N_{0,t} = k) \geq 0$  pour tout  $t$ , d'où  $\alpha_k \geq 0$ .

**5.c.** On reprend la technique du développement limité à l'ordre 1 utilisée à la question 4.b. mais sans plus, bien sûr, faire l'hypothèse (iv). Il vient, quand  $h$  tend vers 0 par valeurs positives,

$$\begin{aligned} f_k(t+h) &= f_0(h)f_k(t) + \sum_{j=0}^{k-1} f_j(h)f_{k-j}(t) \\ &= (1 + \alpha_0 h + \mathfrak{o}(h))f_k(t) + \sum_{j=0}^{k-1} f_{k-j}(t)(\alpha_j h + \mathfrak{o}(h)) = f_k(t) + h \sum_{j=0}^k \alpha_j f_{k-j}(t) + \mathfrak{o}(h). \end{aligned}$$

Il s'ensuit  $(f_k)'_d(t) = \sum_{j=0}^k \alpha_j f_{k-j}(t)$ , d'où  $f'_k(t) = \sum_{j=0}^k \alpha_j f_{k-j}(t)$  d'après le caractère dérivable de  $f_k$  (3.c.).

On reconnaît dans la formule précédente un produit de Cauchy traduisant l'égalité formelle

$$A(x)G(t, x) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(t) x^k = \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) x^k \right) = \frac{\partial G}{\partial t}(t, x).$$

Pour justifier la validité de la dérivation terme à terme, on fixe  $x \in ]-1, 1[$ . On a vu que  $\alpha_0 < 0$  et  $\alpha_k \geq 0$  pour  $k \geq 1$ . De plus,

$$1 \geq \mathbf{P}(N_{0,t} \leq k) = \sum_{j=0}^k f_j(t) = (1 + \alpha_0 t + \mathfrak{o}(t)) + \sum_{j=1}^k (\alpha_j t + \mathfrak{o}(t)) = 1 - (\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_k)t + \mathfrak{o}(t).$$

Il s'ensuit  $\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_k \geq 0$  pour tout  $k$ . Ainsi, les sommes partielles de la série à termes positifs  $\sum_{j \geq 1} \alpha_j$  sont majorées (par  $\alpha_0$ ). Comme  $\|f_k\|_{\infty} \leq 1$  pour tout  $k$ , on déduit de la relation  $f'_k(t) = \sum_{j=0}^k \alpha_j f_{k-j}(t)$

la majoration  $\|f'_k\|_{\infty} \leq |\alpha_0| + \sum_{j=1}^k \alpha_j \leq 2\alpha_0$ . Il s'ensuit que la série de fonctions définissant  $t \mapsto G(t, x)$  est simplement convergente et que la série des dérivées converge normalement, donc uniformément sur  $\mathbb{R}$ ; on peut donc dériver terme à terme.

Il reste à valider le produit de Cauchy sur  $] -1, 1[$ , donc à vérifier que les deux séries dont on effectue le produit sont de rayon de convergence au moins 1. C'est bien le cas pour  $G(t, x)$  d'après la question 5.a. Pour la série  $A(x)$ , la série est donc convergente et  $\sum \alpha_j x^j$  converge donc pour  $x = 1$ . Or, le rayon de convergence de  $A$  est  $R = \sup \{x \geq 0 ; \sum \alpha_j x^j \text{ converge}\}$ , d'où  $R \geq 1$ .

**5.d.** Notons  $G_1$  la première fonction partielle de  $G$  à  $x$  fixé. L'équation aux dérivées partielles se réécrit  $G'_1(t) = A(x)G_1(t)$ , ce qui s'intègre en  $G_1(t) = Ce^{tA(x)}$ . Ici,  $C$  est une constante par rapport à  $t$ , mais est a priori différente pour chaque  $x$ . En revenant à  $G$ , on a donc  $G(t, x) = C(x)e^{tA(x)}$ . En insérant  $t = 0$  et en utilisant la question 1.a, il vient  $G(1, x) = 1$ , d'où  $C(x) = 1$  pour tout  $x$ . On a donc bien  $G(t, x) = e^{tA(x)}$ .

La fonction  $G$  étant la série génératrice de  $N_{0,t}$ , on a, sous réserve d'existence des moments :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(N_{0,t}) &= \frac{\partial G}{\partial x}(t, 1) = [tA'(x)e^{tA(x)}]_{x=1} = tA'(1)G(t, 1) = tA'(1) \quad \text{et} \\ \mathbf{V}(N_{0,t}) &= \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(t, 1) + \frac{\partial G}{\partial x}(t, 1) - \left( \frac{\partial G}{\partial x}(t, 1) \right)^2 \\ &= [(tA''(x) + t^2A'(x)^2)e^{tA(x)}]_{x=1} + tA'(1) - t^2A'(1)^2 = t(A''(1) + A'(1)). \end{aligned}$$

Pour que ces calculs soient valides, il faut que le rayon de convergence  $R(t)$  de  $x \mapsto G(t, x)$  soit strictement supérieur à 1. Les calculs faits précédemment sont alors valables sur  $\{(t, x) ; t \geq 0 \text{ et } |x| < R(t)\}$ .

**5.e.** Sous l'hypothèse (iv), la question 4.a montre que l'on a  $\lambda = -\alpha_0 = \alpha_1$  et  $\alpha_k = 0$  pour  $k \geq 2$ , soit  $A(x) = \lambda(x - 1)$ . En reportant dans l'expression de  $G$ , il vient  $G(t, x) = e^{\lambda t(x-1)}$ , en qui l'on reconnaît la série génératrice de la loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ . On retrouve ainsi le résultat  $N_{0,t} \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ .

**6.a.** Par hypothèse, un quelconque des  $n$  points considérés a une probabilité  $t$  d'appartenir à l'intervalle  $[0, t[$  (pour  $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$  et  $t \in [0, 1]$ , on a  $\mathbf{P}(X \leq t) = \mathbf{P}(X < t) = t$ ). La v.a.  $N_{0,t}$  comptant ceux des points qui figurent dans  $[0, t[$ , elle s'interprète comme le nombre de succès parmi  $n$  expériences indépendantes de probabilités de succès individuels  $t$ , ce qui est la définition d'une loi binomiale de paramètre  $(n, t)$ .

**6.b.** Utilisons la formule des probabilités totales : pour  $t \in [0, 1]$  et  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$f_k(t) = \mathbf{P}(N_{0,t} = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(N_{0,t} = k \mid N_{0,1} = n) \mathbf{P}(N_{0,1} = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \mathbf{P}(N_{0,1} = n).$$

En particulier, en notant  $G = G_{N_{0,1}}$  la série génératrice de la v.a.  $N_{0,1}$ , il vient

$$f_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(N_{0,1} = n) (1-t)^n = G(1-t) \quad \text{et} \quad f_1(t) = t \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(N_{0,1} = n) n (1-t)^{n-1} = tG'(1-t).$$

On pourrait montrer de même que  $f_k(t) = \frac{t^k}{k!} G^{(k)}(1-t)$ , mais ce n'est pas utile. En effet, on a supposé que  $N_{0,1}$  admet un moment d'ordre 2, ce qui entraîne que  $G$  est deux fois dérivable à gauche en 1. On peut donc appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à  $G$  entre  $1-t$  et 1 à l'ordre deux donne

$$\mathbf{P}(N_{0,t} \geq 2) = 1 - f_0(t) - f_1(t) = G(1) - G(1-t) - tG'(1-t) = \frac{t^2}{2} \sup_{1-t \leq \vartheta \leq 1} |G''(\vartheta)|.$$

Quand  $t$  tend vers 0,  $\sup_{1-t \leq \vartheta \leq 1} |G''(\vartheta)|$  tend vers  $G''(1)$ . Il s'ensuit que, pour  $t$  suffisamment petit, on a

$$\left| \frac{t^2}{2} G''(\vartheta(t)) \right|_{t \rightarrow 0} = \mathcal{O}(t^2), \text{ d'où } \mathbf{P}(N_{0,t} \geq 2) = \mathfrak{o}(t), \text{ c'est-à-dire (iv).}$$