

Produits scalaires - Résumé

1. PRODUIT SCALAIRE

1.1. Définition.

Définition 1. 1. Soit E un $\mathbb{R}$ -e.v. Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive définie sur $E \times E$. Notations les plus usuelles (non exclusives de variantes) : $(x|y)$, $\langle x, y \rangle$, $x.y$.

2. Un couple $(E, (\cdot|\cdot))$, où E est un e.v. réel et $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire défini sur E est appelé espace préhilbertien (réel). Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

— *Forme*, comme dans *forme linéaire*, signale que le produit scalaire est à valeurs dans le corps des scalaires, ici $\mathbb{R}$. Il existe un analogue du produit scalaire pour les e.v. complexes, dit *produit scalaire hermitien*, où *bilinéaire symétrique* devient *sesquilinéaire hermitienne*. C'est hors programme depuis 2015.

— Le terme *bilinéaire* signifie que, pour tout $x \in E$, $y \mapsto (x|y)$ est une forme linéaire sur E et que, pour tout $y \in E$, $x \mapsto (x|y)$ en est une aussi.

— *Symétrique* signifie que, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $(x|y) = (y|x)$.

— *Positive* est trompeur. La linéarité fait que $(x|-y) = -(x|y)$ et qu'un produit scalaire n'est jamais à valeurs positives. *Positive* signifie que, pour tout vecteur $x \in E$, $(x|x) \geq 0$.

— Enfin, *défini* est un terme encore plus mal choisi pour dire que si $(x|x) = 0_{\mathbb{R}}$, alors $x = 0_E$, la réciproque étant une conséquence banale de la bilinéarité.

Il est à la fois trivial et utile de noter que si $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace préhilbertien et si F est un s.e.v. de E , alors $(\cdot|\cdot)$ induit sur F un produit scalaire par restriction, faisant de $(F, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien. Enfin, il est tout aussi évident que, si $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire, alors $\lambda(\cdot|\cdot)$ en est également un pour tout $\lambda > 0$.

— Il existe une structure préhilbertienne complexe, hors programme. C'est pourquoi on omettra le qualificatif « réel » pour parler simplement d'« espace préhilbertien ».

1.2. Comment montrer qu'on a bien un produit scalaire ? Il est impératif de rappeler la liste exhaustive des axiomes car on évalue ici, entre autres, la connaissance précise de la définition. Il y a un ordre naturel :

(i) Le cas échéant (si ce n'est pas trivial), montrer que le produit scalaire est bien défini, au sens de son existence. Par exemple si son expression fait intervenir une intégrale impropre, ou un quotient susceptible de s'annuler. L'anglais a la bonne idée de faire la différence entre *well defined* (c'est le sens pour des scalaires définis par une intégrale impropre) et *positive definite*, au sens des deux dernières propriétés qui définissent un produit scalaire. Le français utilise le même mot, dont les significations se télescopent.

(ii) Montrer la symétrie, le plus souvent évidente.

(iii) Montrer la bilinéarité. L'intérêt de déjà disposer de la symétrie à ce stade est que l'une des deux linéarités entraîne l'autre. Souvent, la bilinéarité est une conséquence immédiate d'une linéarité connue (intégrale, dérivation, sommation...)

(iv) Prendre $x = y$, montrer le caractère positif, puis le caractère défini (au sens de *definite*).

S'il ne faut pas oublier de propriété en route, il convient de ne s'appesantir que sur les points non immédiats. Il n'est pas illégitime de dire que certaines propriétés sont évidentes, ou de les justifier de manière laconique (« bilinéaire par linéarité de l'intégrale » ou « positif comme somme de carrés réels »).

1.3. Exemples.

Exemple 1. *Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.*

C'est l'extension à $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire de la géométrie en dimension 2 et 3. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on pose $x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$. Matriciellement, si X et Y sont les vecteurs colonnes des coordonnées de x et de y respectivement, on a $x \cdot y = X^T Y$. Dans tout le document, on notera $\langle X, Y \rangle = X^T Y$ ce produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ vu comme espace des colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On verra que c'est un exemple fondamental.

Proposition 1. Transport par isomorphisme. Si φ est un isomorphisme de E sur F et si $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur F , alors, $(x, y) \mapsto (\varphi(x)|\varphi(y))$ définit un produit scalaire sur E .

Exemple 2. Le produit scalaire de l'exemple 1 s'étend à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par son identification canonique avec $\mathbb{R}^{n^2}$. On en a alors une expression en langage matriciel : $(A|B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j} = \text{tr}(A^T B)$.

Exemple 3. • $\Phi((x, y), (x', y')) = 3xx' + 2yy' + xy' + x'y$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, qui n'est donc pas le produit scalaire canonique.

• $(P | Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ et $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ définissent des produits scalaires sur $\mathbb{R}[X]$.

2. NORME

2.1. Définition, calculs. Parmi les calculs fondamentaux figure le développement de la norme d'une somme. En utilisant la bilinéarité, on obtient :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x | y), \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x | y)$$

ce qui se généralise en

$$(1) \quad \|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i | x_j) = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} (x_i | x_j) = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i | x_j).$$

Proposition 2. Si $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire défini sur un $\mathbb{R}$ -e.v. E , alors $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x | x)}$ définit une norme sur E et le munit de ce fait d'une structure d'espace vectoriel normé.

Le point non trivial est l'inégalité triangulaire, corollaire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

Proposition 3. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Si $(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace préhilbertien, alors,

$$\forall (x, y) \in E^2 : |(x | y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Il y a égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

Corollaire 1. Les applications $x \mapsto (x | y)$, $y \mapsto (x | y)$ et $(x, y) \mapsto (x | y)$ sont continues.

Il faut savoir démontrer Cauchy-Schwarz. L'idée de départ, à retenir, est de développer $\|x + ty\|^2$ en utilisant (2.1). Si $y \neq 0_E$, on obtient un polynôme du second degré en t ne prenant que des valeurs positives, donc de discriminant négatif, cette inégalité étant précisément l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On traite à part le cas $y = 0_E$. Il est utile (pour établir par exemple que $\text{cov}(X, Y) \leq \sigma(X)\sigma(Y)$ ou pour établir l'inégalité éponyme pour les intégrales des fonctions continues par morceaux) de noter que l'inégalité de Cauchy-Schwarz n'utilise pas le caractère défini du produit scalaire, mais seulement le fait qu'il définisse une forme bilinéaire symétrique positive. Les cas d'égalité, en revanche, doivent être adaptés.

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité, qui se généralise à n vecteurs. On en déduit aussi la continuité de $(x, y) \mapsto (x | y)$ et des applications partielles $x \mapsto (x | y_0)$ et $y \mapsto (x_0 | y)$ par rapport à la norme sous-jacente.

Proposition 4. Si $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire défini sur un $\mathbb{R}$ -e.v. E et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, alors

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_n\|$$

et il y a égalité si, et seulement si, tous les vecteurs x_i sont colinéaires et de même sens, c'est-à-dire s'il existe un vecteur u et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tels que $x_i = \lambda_i u$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Cela s'adapte aux complexes en identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$: $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$, avec égalité si, et seulement si, les z_i sont de même argument modulo 2π .

2.2. Polarisation. Si la norme est construite à partir du produit scalaire, il est possible de retrouver le produit scalaire uniquement à partir de la norme. Ce sont les *identités de polarisation* ; il y en a deux :

$$\forall (x, y) \in E^2 : (x | y) = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Si l'on connaît une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, pour savoir si c'est une norme relative à un produit scalaire, on utilise la proposition suivante :

Proposition 5. 1. Une norme $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ dérive d'un produit scalaire si, et seulement si, l'application $(x, y) \mapsto N(x + y)^2 - N(x - y)^2$ est bilinéaire.

2. Plus généralement, une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ définit sur E une norme préhilbertienne (i.e. une norme dérivant d'un produit scalaire) si, et seulement si,

(i) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E : N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ (en fait, le cas $\lambda = 2$ suffit, mais cela ne simplifie pas le calcul) ;

(ii) l'application $\varphi : (x, y) \mapsto N(x + y)^2 - N(x - y)^2$ est un produit scalaire sur E (elle est toujours symétrique).

Il peut être utile de noter que les identités de polarisation n'utilisent que le caractère bilinéaire symétrique du produit scalaire et non le côté défini positif. Ainsi, si φ et ψ sont deux formes bilinéaires symétriques sur un espace vectoriel E et si, pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x, x) = \psi(x, x)$, alors $\varphi = \psi$, i.e. $\varphi(x, y) = \psi(x, y)$ pour tout $(x, y) \in E^2$.

La proposition 5 permet de montrer par exemple que la norme infinie ou la norme 1 sur $\mathbb{R}^n$ ne sont pas des normes préhilbertiennes. Avec les notations de la proposition 5-2-(ii), considérer $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $y_0 = (1, -1, 0, \dots, 0)$ et vérifier que $\varphi_\infty(x_0, y_0) = 3$ et $\varphi_\infty(x_0, 2y_0) = 5$ et que $\varphi_1(x_0, y_0) = 8$, $\varphi_1(2x_0, y_0) = 12$.

3. ORTHOGONALITÉ

On se place dans un espace préhilbertien $(E, (\cdot | \cdot))$.

3.1. Définition.

Définition 2. 1. Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $(x | y) = 0$. On note $x \perp y$.

2. Si A et B sont deux parties de E , elles sont orthogonales si $\forall (a, b) \in A \times B: a \perp b$.

3. Si $A \subset E$, l'orthogonal de A , noté $A^\perp$, est l'ensemble des vecteurs x de E tels que $\{x\} \perp A$.

La définition de l'orthogonal d'une partie est en général utilisée pour les sous-espaces vectoriels et seul ce cas est exigible; la raison se trouve parmi les propriétés ci-dessous.

Propriétés 1. — Si $A \subset B \subset E$, alors $A^\perp \supset B^\perp$.

— Si $A \subset E$, alors $A \subset A^{\perp\perp}$.

— $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.

— Si $A \subset E$, alors $A^\perp$ est un s.e.v. fermé de E , et $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp = \overline{A}^\perp = \overline{\text{Vect}(A)}^\perp$.

— Si A et B sont des parties de E , alors $A \perp B \iff \text{Vect}(A) \perp \text{Vect}(B) \iff \overline{\text{Vect}(A)} \perp \overline{\text{Vect}(B)}$.

— Si F est un s.e.v. de E , alors $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Si $A \subset E$, alors $A \cap A^\perp \subset \{0_E\}$ (cela vient de ce que seul 0_E est orthogonal à lui-même).

— Si F et G sont deux s.e.v. de E tels que $F \perp G$, alors $F + G = F \oplus G$. On note alors $F \perp^\perp G$.

— Exercice. Si F et G sont des s.e.v. de E , alors $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$ et $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ (égalité en dimension finie).

En pratique, la propriété de l'orthogonal d'une partie quelconque à retenir en priorité est que, pour vérifier une propriété d'orthogonalité relative à $\text{Vect}(\mathcal{F})$ ou à $\overline{\text{Vect}(\mathcal{F})}$, il suffit de traiter le cas des vecteurs de $\mathcal{F}$. La dernière propriété est délicate à mémoriser. Il suffit de savoir qu'il existe une relation de ce type; elle se retrouve facilement.

3.2. Familles de vecteurs orthogonaux.

Définition 3. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite orthogonale si, pour tout $i \neq j$, $x_i \perp x_j$.

Proposition 6. Théorème de Pythagore.

1. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $x \perp y$ si, et seulement si, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

2. Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille orthogonale, alors $\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$.

Le théorème de Pythagore est une conséquence immédiate des équations (1). On notera que, pour plus de deux vecteurs, la réciproque du théorème de Pythagore est fautive. Prendre par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$ et $z = (-1, 1)$. On a alors $\|x + y + z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 = 4$, mais $\langle x, z \rangle$ et $\langle y, z \rangle$ sont non nuls. Du théorème de Pythagore, on déduit une conséquence importante :

Proposition 7. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

3.3. Bases orthogonales et orthonormales.

3.3.1. Définition.

Définition 4. Une base orthogonale (B.O.G.) est à la fois une base et une famille orthogonale. Une famille est orthonormale (ou orthonormée) si elle est orthogonale et que tous les vecteurs qui la composent sont normés (i.e. de norme 1). On parle alors de base orthonormée (B.O.N.).

Une famille extraite d'une famille orthogonale est orthogonale. Plus généralement, une somme finie $\sum_{i=1}^p F_i$ de s.e.v. est *orthogonale* si, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, $F_i \perp F_j$. Une somme orthogonale est nécessairement directe et l'on a alors notamment $F_j \perp \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq j}} F_i$. Si $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} F_i$, la concaténation de B.O.N. des F_i donne une B.O.N. de E . C'est important pour le théorème spectral.

Exemple 4 (Polynômes de Lagrange revisités.). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ des réels. On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k)$. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme $L_i = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$ est de degré n et vérifie $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Il est immédiat que, pour tout $P \in E$ et tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(P|L_j) = P(x_j)$. En particulier, pour $P = L_i$, il vient $(L_i|L_j) = \delta_{i,j}$, ce qui montre que $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une B.O.N. de E . Corrélativement, pour tout $P \in E$, on a $P = \sum_{i=0}^n (P|L_i)L_i = \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i$.

3.3.2. Expressions explicites en B.O.N. Ce paragraphe est d'utilisation constante. **Attention, les expressions ci-dessous ne sont vraies qu'en B.O.N.** Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une B.O.N. de E .

- Si $x \in E$, alors $x = \sum_{i=1}^n (x|e_i) e_i$. Ainsi, les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ s'expriment explicitement comme des produits scalaires.
- Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$. De $f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$, on tire $a_{i,j} = (e_i|f(e_j))$.
- Transport entre un espace euclidien $(E, (\cdot|\cdot))$ de dimension n et l'espace euclidien des colonnes $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle X, Y \rangle = X^T Y$.

Si $x \in E$ et $X = ((x|e_1) \ \dots \ (x|e_n))^T$, vecteur colonne des coordonnées de x dans une B.O.N. $\mathcal{B}$. Alors,

$$(x|y) = X^T Y = \langle X, Y \rangle \quad \& \quad \|x\|_E^2 = \|X\|_{\mathbb{R}^n, \text{can}}^2 = X^T X.$$

Ainsi, le produit scalaire de deux vecteurs de E s'obtient en faisant le produit scalaire de leurs coordonnées en B.O.N. au sens du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

3.3.3. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Proposition 8. Si $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille libre de E , il existe une unique famille $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in E^n$ t.q.

- (i) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ est une B.O.N. de $F_k = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$;
- (ii) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(e_k|u_k) > 0$.

La construction se fait par récurrence sur k . Le premier vecteur est donné par $e_1 = u_1/\|u_1\|$. Si $(e_1, \dots, e_k)$ est déjà définie, on construit un vecteur intermédiaire de la forme $e'_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{j=1}^k \lambda_j e_j \in F_{k+1} \cap F_k^\perp$. Il est alors clair que $e'_{k+1} \in F_{k+1} \setminus F_k$, donc que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k, e'_{k+1}) = F_{k+1}$. Les relations d'orthogonalité $(e'_{k+1}|e_j)$ donnent $\lambda_j = (u_{k+1}|e_j)$. On pose enfin $e_{k+1} = e'_{k+1}/\|e'_{k+1}\|$, ce qui donne une solution de i). Alors,

$$(e'_{k+1}|u_{k+1}) = \|u_{k+1}\|^2 - \sum_{j=1}^k (u_{k+1}|e_j)^2 = (u_{k+1}|e_{k+1})^2 > 0$$

d'après l'expression de la norme en B.O.N. Noter que, par construction, la matrice de passage de $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ à $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est triangulaire supérieure par la condition (i), à coefficients diagonaux strictement positifs par la condition (ii).

Corollaire 2. Théorème de la base orthonormée incomplète.

Soit E un espace préhilbertien de dimension finie ou dénombrable. Toute famille orthonormale de E peut se compléter en une B.O.N. de cet espace. En particulier, E admet une base orthonormale.

Interprétation matricielle (HP). Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice de rang n . Appliqué aux colonnes $u_j = C_j(A) \in \mathbb{R}^m$, le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt donne une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m$. Avec les notations de la proposition 8 et l'expression d'un vecteur en B.O.N., si Q est la matrice des vecteurs e_j exprimés dans la base canonique de $\mathbb{R}^m$ et si $R = (r_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ avec $r_{i,j} = (u_i | e_j)$ pour $i \leq j$, il vient $C_k(A) = QC_k(R)$ pour tout k , soit $A = QR$. Si $m = n$, $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et l'on retrouve la formule de concaténation des changements de base avec $A = P_{\text{can}, \mathcal{U}}$, $Q = P_{\text{can}, \mathcal{E}}$ et $R = P_{\mathcal{E}, \mathcal{U}}$. Ce résultat est la *décomposition QR* : toute matrice réelle inversible s'écrit comme le produit d'une matrice orthogonale (ici, Q) et d'une matrice triangulaire supérieure à coefficients strictement positifs (ici, R). En prenant le déterminant, on obtient l'*inégalité de Hadamard* :

$$|\det A| = |\det Q| \times |\det R| = \prod_{j=1}^n |(u_j, e_j)| \leq \prod_{j=1}^n \|C_j(A)\|_2.$$

3.4. Projections et symétries orthogonales. Soient F un s.e.v. de dimension finie d'un espace préhilbertien $(E, (\cdot | \cdot))$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une B.O.N. de F . L'expression en coordonnées d'un vecteur obtenue en 3.3.2 conduit

à définir l'application linéaire $p_F : E \rightarrow F$ donnée par $p_F(x) = \sum_{j=1}^n (x | e_j) e_j$. Soit alors $y \in F$. On vérifie facilement (bilinéarité) que $(y | x - p_F(x)) = 0$, ce qui montre que $x - p_F(x) \in F^\perp$. Comme on sait que $F \cap F^\perp = \{0\}$, il vient donc $E = F \oplus F^\perp$.

Ainsi, p_F est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$. Cela montre aussi que $\sum_{j=1}^n (x | e_j) e_j$, bien que définie à partir d'une B.O.N. ne dépend pas en fait de cette base. On peut énoncer :

Théorème et définition 1. Soit F un s.e.v. de dimension finie d'un espace préhilbertien $(E, (\cdot | \cdot))$. Alors, on a $E = F \oplus F^\perp$. On appelle projection orthogonale sur F le projecteur $p_F = p_{F//F^\perp}$, projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$. Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une B.O.N. de F , on a, pour tout $x \in E$: $p_F(x) = \sum_{j=1}^n (x | e_j) e_j$.

Propriétés 2. Sous l'hypothèse, $E = F \oplus F^\perp$, on a

- $F^{\perp\perp} = F$.
- Si $E = F \oplus G$, alors $G = F^\perp$.
- $\text{Ker}(p_F) = F^\perp$ et $\text{Im}(p_F) = \text{Ker}(p_F - \text{id}_E) = E_1(p_F) = F$.
- $\forall x \in E$: $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$ avec égalité si, et seulement si, $x \in F$.
- $\forall x \in E$: $(p_F(x) | x) = \|p_F(x)\|^2 \geq 0$, d'où $(p_F(x) | x) = 0$ si, et seulement si, $x \in F^\perp$.
- Si $x \in E$, la distance de x à F est atteinte et le théorème de Pythagore donne

$$d(x, F) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y \in F} \|y - x\| = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|.$$

- Relecture de la construction de Gram-Schmidt : dans le procédé d'orthonormalisation, et avec les notations de la section correspondante, $e'_{k+1} = u_{k+1} - p_{F_k}(u_{k+1}) = p_{F_k^\perp}(u_{k+1})$.

Corollaire 3. Inégalité de Bessel. Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille orthonormée de E (donc libre, mais pas nécessairement génératrice) et si $x \in E$, alors $\sum_{j=1}^n (x | e_j)^2 \leq \|x\|^2$.

Exemple 5. Si l'on ne suppose plus F de dimension finie, F et $F^\perp$ sont toujours en somme directe, mais plus nécessairement supplémentaires. Considérons par exemple sur $E = \mathbb{R}[X]$ le produit scalaire $(P | Q) = \int_0^\pi P(\sin t) Q(\sin t) dt$ et prenons $F = X\mathbb{R}[X]$ l'hyperplan des polynômes dont la fonction polynomiale associée s'annule en 0. Alors, pour tout $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$, on a $(P | XP) > 0$, d'où $F^\perp = \{0\}$.

Exemple 6. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \sum_{n=0}^{\deg(P)} p_n X^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{\deg(Q)} q_n X^n$, on définit un produit scalaire sur E par $(P|Q) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n q_n$ (la somme n'a qu'un nombre fini de termes non nuls). Alors, $E = \mathbb{R}[X^2] \overset{\perp}{\oplus} X\mathbb{R}[X^2]$ (somme directe des polynômes pairs et des polynômes impairs), ce qui donne un exemple de décomposition $E = F \oplus F^\perp$ avec F et $F^\perp$ de dimension infinie.

Définition 5. Soit F un s.e.v. de dimension finie d'un espace euclidien $(E, (\cdot|\cdot))$. On appelle symétrie orthogonale sur F et l'on note s_F la symétrie $s_F = s_{F//F^\perp}$, symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

Soit F un s.e.v. de dimension finie d'un $\mathbb{R}$ -e.v. E . Le calcul direct de p_F requiert la détermination préalable d'une B.O.N. de F , en général par le procédé de Gram-Schmidt. Celui de s_F requiert *a priori* la détermination d'une B.O.N. de F et de $F^\perp$. Toutefois, la décomposition ci-contre donne les relations $p_F + p_{F^\perp} = \text{id}_E$ et $s_F = p_F - p_{F^\perp}$. Ainsi, il suffit de connaître une expression de l'une des deux projections pour en obtenir une de l'autre et de la symétrie. En pratique, le coût calculatoire du procédé d'orthonormalisation croît rapidement avec la dimension de l'espace. On a donc intérêt, pour déterminer p_F ou s_F , à passer par $p_{F^\perp}$ si $2 \dim F > \dim E$.

$$\begin{aligned} E &= F \oplus F^\perp \\ x &= p_F(x) + p_{F^\perp}(x) \\ s_F(x) &= p_F(x) - p_{F^\perp}(x) \end{aligned}$$

4. ESPACE DUAL

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on rappelle que son espace dual est, par définition, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, l'espace vectoriel de ses formes linéaires. Si E est de dimension finie, alors $\dim E^* = \dim E \times \dim \mathbb{K} = \dim E$ et les deux espaces E et E^* sont donc isomorphes.

4.1. Isomorphisme canonique entre E et E^* . Dans le cas des espaces euclidiens, il existe un *isomorphisme canonique* entre E et E^* , en ce sens qu'il ne nécessite l'expression d'aucune base :

Théorème 1. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien. Alors, l'application $\Lambda: x \mapsto (x|\cdot)$, c'est-à-dire l'application $x \mapsto [y \mapsto (x|y)]$, définit un isomorphisme de E sur E^* .

La démonstration de ce théorème abstrait est immédiate : le noyau de l'application ci-dessus est par définition $E^\perp = \{0_E\}$, d'où l'injectivité, puis l'isomorphisme par dimension. La surjectivité se voit aussi explicitement : si $u \in E^*$, soient $H = \text{Ker } u$, $D = H^\perp$ et x_0 tel que $D = \text{Vect}(x_0)$. Alors, $y \mapsto (x_0|y)$ a le même noyau que u , car $D^\perp = H^{\perp\perp} = H$, donc ces deux formes linéaires sont proportionnelles, ce qui montre l'existence d'un réel λ tel que $(\lambda x_0|\cdot) = u$. Ce théorème ne s'étend pas aux espaces préhilbertiens (*i.e.* à la dimension infinie).

Interprétation géométrique. Si $a \in E \setminus \{0_E\}$, $H_a = \text{Ker}(\Lambda(a))$ est un hyperplan de E . Il est entièrement défini par a , qui en est un *vecteur normal*. Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E et $a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$, $H = \{a\}^\perp$ a pour équation $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ dans la base $\mathcal{B}$. Dans le cas $E = \mathbb{R}^n$, on retrouve qu'en base orthonormée, les coefficients de l'équation d'un hyperplan en sont un vecteur normal.

4.2. Un exercice des Mines. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient au moins une matrice inversible. Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On sait qu'il existe une forme linéaire u sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $H = \text{Ker}(u)$. D'après le théorème de dualité, il existe donc une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; \text{tr}(AM) = 0\}$. Si $\text{tr}(A) = 0$, $I_n \in H \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$ répond à la question. Si $\text{tr}(A) \neq 0$, on prend $M = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. On veut que les λ_i soient tous non nuls (inversibilité de M) et que $\text{tr}(AM) = \lambda_1 a_{1,1} + \lambda_2 a_{2,2} + \dots + \lambda_n a_{n,n} = 0$. Si $a_{1,1} a_{2,2} \neq 0$, on prend $\lambda_i = 1$ pour tout $i \in [3, n]$, λ_2 tel que $\lambda_2 a_{2,2} + \sum_{i=3}^n a_{i,i} \neq 0$ et $\lambda_1 = -\frac{1}{a_{1,1}} \left(\lambda_2 a_{2,2} + \sum_{i=3}^n a_{i,i} \right)$. Cela s'étend bien sûr par symétrie aux matrices A de trace non nulle dont au moins deux des coefficients diagonaux sont non nuls. Enfin, si $a_{1,1}$ est le seul coefficient diagonal de A non nul, on ne peut plus considérer M diagonale ; on prend $M = \text{Diag}(U, I_{n-2})$. Pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, on prend $U = \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ si $b \neq 0$, $U = \begin{pmatrix} -c & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si $c \neq 0$ et $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ si $b = c = 0$. Un calcul facile montre que M satisfait au cahier des charges.

4.3. Complément HP. Revenons au cas d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On sait que E et E^* sont isomorphes ; il n'existe pas d'isomorphisme canonique entre E et E^* comme dans le cas euclidien, mais on peut construire un tel isomorphisme à partir de n'importe quelle base de E : si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , il existe pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ une unique forme linéaire e_i^* sur E telle que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ (car toute application linéaire est entièrement caractérisée par son action sur une base de l'espace de départ). On vérifie facilement que $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* , appelée *base duale* de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. En particulier, la construction de la base duale fournit un isomorphisme entre E et E^* par $e_i \mapsto e_i^*$.

Il existe, en dimension finie, un isomorphisme entre E et son *bidual* E^{**} , donné par $x \mapsto [u \mapsto u(x)]$.

5. ISOMÉTRIES ET MATRICES ORTHOGONALES

5.1. Changements de B.O.N. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une B.O.N. de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ une famille quelconque de n vecteurs E . Soit enfin P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (les colonnes de P sont les coordonnées des vecteurs e'_j dans la base $\mathcal{B}$). Par définition d'une matrice de passage et du produit de deux matrices,

$$(e'_i | e'_j) = \langle C_i(P), C_j(P) \rangle = C_i(P)^\top C_j(P) = L_i(P^\top) C_j(P) = (P^\top P)_{|i,j}.$$

Il s'ensuit que $\mathcal{B}'$ est une B.O.N. si, et seulement si, $P^\top P = I_n$.

5.2. Matrices orthogonales, groupe orthogonal.

Théorème et définition 2. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- (i) M est une matrice de changement de B.O.N. ;
- (ii) Les colonnes de M forment une B.O.N. de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$;
- (iii) Les lignes de M forment une B.O.N. de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$;
- (iv) M est inversible et $M^{-1} = M^\top$.

Les propriétés générales de l'inversion des matrices font que (iv) peut se reformuler en $M^\top M = I_n$ ou en $MM^\top = I_n$. Relevons une incohérence terminologique : les colonnes (comme les lignes) d'une matrice orthogonale forment une base orthonormale. Il serait plus naturel de parler de *matrices orthonormales*, mais la terminologie est bien ancrée...

Notation 1. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille n .

Propriétés 3. — Les matrices orthogonales de taille n forment un *sous-groupe* de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour la multiplication. Autrement dit, si P et Q sont orthogonales, alors P^{-1} et PQ le sont également. $\mathcal{O}(n)$ est également stable par transposition.

- Si $M \in \mathcal{O}(n)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, alors $|\lambda| = 1$.
- Si $M \in \mathcal{O}(n)$, alors $\det(M) \in \{-1, 1\}$.
- On retrouve le fait qu'un changement de B.O.N. conserve la norme : si $X \in \mathbb{R}^n$ et $P \in \mathcal{O}(n)$, alors

$$\|PX\|^2 = (PX)^\top (PX) = X^\top P^\top PX = X^\top X = \|X\|^2.$$

Définition 6. On dit que A et B , matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonalement semblables s'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP = P^\top AP$.

Propriété. Deux matrices orthogonalement semblables ont même norme euclidienne canonique.

5.3. Orientation, groupe spécial orthogonal.

Définition 7. On note $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ et on appelle groupe spécial orthogonal le sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices orthogonales de déterminant 1. Comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit, passage à l'inverse et transposition.

Si E est un espace euclidien, on définit une relation d'équivalence sur l'ensemble de ses B.O.N. par $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ si la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ appartient à $\mathcal{SO}(n)$. Cette relation définit deux classes d'équivalence, représentant chacune une orientation. Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, on convient que la base canonique est directe. Les B.O.N. directes sont alors celles dont la matrice de passage de la base canonique à elles est de déterminant 1. On abrège « base orthonormée directe » en B.O.N.D.

Dans un espace euclidien quelconque, aucun choix d'orientation ne s'impose. Dans le plan ou l'espace physique, le choix de l'orientation est donné par une convention humaine non mathématisable (sens des aiguilles d'une montre, règle des trois doigts de la main droite). L'orientation d'un espace n'induit pas d'orientation d'un sous-espace, même en petite dimension. En revanche, dans l'espace orienté $\mathbb{R}^3$, l'orientation d'une droite $D = \text{Vect}(\vec{n})$ de $\mathbb{R}^3$ (on appelle *axe* une droite orientée) définit une orientation du plan $P = D^\perp$: on dit qu'une B.O.N. $(\vec{u}, \vec{v})$ de P est directe si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est une B.O.N.D de $\mathbb{R}^3$.

Soient E un e.v. de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E . Si $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille de n vecteurs de E , on définit $\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ comme le déterminant de la matrice M telle que $C_j(M)$ est le vecteur colonne des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E , les formules de changement de base donnent

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}) \times \det_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Il s'ensuit que, dans un espace euclidien orienté, on peut définir le déterminant absolu d'une famille de vecteurs comme son déterminant dans n'importe quelle B.O.N.D, le résultat ne dépendant pas de la B.O.N.D. vu que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$. On parle alors de *produit mixte* : $[u_1, u_2, \dots, u_n] = \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n)$, où $\mathcal{B}$ est n'importe quelle B.O.N.D.

Angle de deux vecteurs. Si u et v sont deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien E , on définit l'angle non orienté $(\widehat{u, v}) \in [0, \pi]$ par $\cos(\widehat{u, v}) = \frac{(u | v)}{\|u\| \|v\|}$; l'angle est ainsi défini au signe près. La formule 2.1 se relit alors sous la forme de la *formule d'Al Kashi* : $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \cos(\widehat{u, v}) \|u\| \|v\|$.

Dans le plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$, pour $\mathcal{B}$ une B.O.N.D de $\mathbb{R}^2$, l'expression $\det_{\mathcal{B}}(u, v) = \|u\| \|v\| \sin(\widehat{u, v})$ (indépendante de $\mathcal{B}$) permet de définir le signe de l'angle, donc de définir l'angle orienté des deux vecteurs. On a alors $(\widehat{u, v}) = \text{sgn}(\det(u, v)) \arccos\left(\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}\right)$.

5.4. Isométries, automorphismes orthogonaux.

Théorème et définition 3. *Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ d'un espace euclidien E est appelé isométrie (ou automorphisme orthogonal) s'il vérifie l'une des propositions équivalentes suivantes :*

- (i) *il existe une B.O.N. de E dont l'image par u est une B.O.N. ;*
- (ii) *l'image de toute B.O.N. de E par u est une B.O.N. ;*
- (iii) *u conserve la norme : $\forall x \in E : \|u(x)\| = \|x\|$;*
- (iv) *u conserve le produit scalaire : $\forall (x, y) \in E^2 : (u(x) | u(y)) = (x | y)$;*
- (v) *il existe une B.O.N. $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}(n)$;*
- (vi) *dans toute B.O.N. $\mathcal{B}$ de E , $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}(n)$.*

Remarque 1. (i) est un cas particulier de (ii) ; la réciproque s'obtient par l'une des formules de polarisation. Le passage de toute B.O.N. à l'une d'entre elles est trivial une fois prouvée l'existence d'au moins une B.O.N. Le fait que la matrice d'un endomorphisme u dans une B.O.N. $\mathcal{B}$ soit une matrice orthogonale traduit exactement la relation (ii) pour les éléments de $\mathcal{B}$.

Notation 2. On note $\mathcal{O}(E)$ le groupe des isométries de E et $\mathcal{SO}(E)$ le groupe des isométries de E de déterminant 1, dites *isométries directes*. On appelle *similitude* la composée d'une homothétie et d'une isométrie. Ainsi, les matrices de similitude en B.O.N. sont les matrices dont les colonnes sont deux à deux orthogonales et de même norme. Comme pour les isométries, on parle de similitudes directes et indirectes.

Propriétés 4. — La composée et l'inverse d'une isométrie sont des isométries.

- Les isométries sont de déterminant ± 1 .
- Les valeurs propres d'une isométrie ne peuvent être que 1 et -1 .
- Si F est un s.e.v. de E stable par $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $u|_F \in \mathcal{O}(F)$.
- Si F est un s.e.v. de E stable par une isométrie u , alors $F^\perp$ est stable par u .
- Exercice : une symétrie est une isométrie si, et seulement si, c'est une symétrie orthogonale. Les isométries diagonalisables sont les symétries orthogonales.
- Exercice : les similitudes sont les endomorphismes conservant l'orthogonalité.

6. ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS, MATRICES SYMÉTRIQUES

6.1. Définition.

Théorème et définition 4. *Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ d'un espace euclidien E est dit symétrique ou autoadjoint s'il vérifie l'une des propositions équivalentes suivantes :*

- (i) $\forall (x, y) \in E^2 : (f(x) | y) = (x | f(y)) ;$
- (ii) *il existe une B.O.N. $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) ;$*
- (iii) *dans toute B.O.N. $\mathcal{B}$ de E , $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$*

Remarque 2. La matrice d'un endomorphisme autoadjoint dans une base quelconque n'est pas symétrique en général.

Propriétés 5. — On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E . C'est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$.

- La composée de deux endomorphismes autoadjoints qui commutent est un endomorphisme autoadjoint : si f et g sont dans $\mathcal{S}(E)$, alors

$$(g \circ f(x) | y) = (f(x) | g(y)) = (x | f \circ g(y)) = (x | g \circ f(y)).$$

- Si $f \in \mathcal{S}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(f) \in \mathcal{S}(E)$.
- L'inverse d'un endomorphisme autoadjoint inversible est un endomorphisme autoadjoint.
- Si F est un s.e.v. de E stable par $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $u|_F \in \mathcal{S}(F)$.
- Si F est un sev de E stable par un endomorphisme autoadjoint f , alors $F^\perp$ est stable par f .
- Les *réflexions* sont les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan. Elles sont de déterminant -1 .
- Si $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $E = \text{Ker}(u) \oplus^\perp \text{Im}(f)$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si ϕ_A est l'endomorphisme canoniquement associé à A , alors $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, ϕ_A est autoadjoint.
- Exercice : la symétrie $s_{F//G}$ est un automorphisme autoadjoint si, et seulement si, s est une symétrie orthogonale, i.e. $G = F^\perp$.

6.2. Matrices positives, matrices définies positives. On généralise l'expression du produit scalaire en B.O.N : $(x | y) = \langle X, Y \rangle = X^\top Y$.

Proposition 9. *Si $\mathcal{B}$ est une base quelconque d'un espace euclidien $(E, (\cdot | \cdot))$ et si φ est une forme bilinéaire sur $E \times E$, alors $\varphi(x, y) = X^\top G Y$, où X et Y sont les vecteurs colonnes coordonnées respectifs de x et de y dans $\mathcal{B}$ et $G_{|i,j} = \varphi(e_i, e_j)$. Si $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ est une matrice de changement de la base, G (resp. G') la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$), alors $G' = P^\top G P$.*

La forme bilinéaire φ est symétrique si, et seulement si, sa matrice l'est. Si φ est un produit scalaire, la matrice G est appelée *matrice de Gram* du système $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Cela motive les définitions suivantes.

Définition 8. 1. *On dit qu'une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est positive si, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^\top A X \geq 0$ et qu'elle est définie positive si, pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $X^\top A X > 0$. On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'e.v. des matrices symétriques positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques définies positives.*

2. *On dit qu'un endomorphisme autoadjoint $u \in \mathcal{S}(E)$ est positif si, pour tout $x \in E$, $(x | f(x)) \geq 0$ et défini positif si, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $(x | f(x)) > 0$. On définit de même $\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$.*

Proposition 10. *Si $u \in \mathcal{S}(E)$, $\mathcal{B}$ est une B.O.N. de E et $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors*

$$u \in \mathcal{S}^+(E) \iff A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad \& \quad u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Exemple 7. Les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes autoadjoints positifs.

Ce vocabulaire donne une description exhaustive des produits scalaires d'un espace euclidien : ce sont les applications de la forme $(x, y) \mapsto (x | u(x))$ avec u défini positif. Traduit dans $\mathbb{R}^n$, les produits scalaires sont les applications de la forme $(X | Y) = X^\top A Y$ avec A définie positive.

6.3. Matrices de Gram. Ce paragraphe, utile, mais hors programme, généralise à des familles quelconques les calculs menés en B.O.N. au paragraphe 3.3.2. Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace euclidien et $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E . La matrice de Gram associée à $\mathcal{B}$ est $G(e_1, e_2, \dots, e_p) = ((e_i | e_j))_{1 \leq i, j \leq p}$. Alors,

- (i) si $(x, y) \in E^2$, $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$, et $y = \sum_{i=1}^p y_i e_i$, en notant X et Y les vecteurs colonnes coordonnées correspondants, on a $(x | y) = X^T G(e_1, \dots, e_p) Y$;
- (ii) $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une famille orthogonale si, et seulement si, $G(e_1, \dots, e_p)$ est diagonale ;
- (iii) $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une famille orthonormale si, et seulement si, $G(e_1, \dots, e_p) = I_p$;
- (iv) $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une famille libre si, et seulement si, $G(e_1, \dots, e_p) \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$;

- (v) si $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ et $\mathcal{F}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_p)$ sont deux p -uplets de vecteurs de E et si P est telle que $e'_j = \sum_{i=1}^p p_{i,j} e_i$

(si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont des bases, P est la matrice de passage $P_{\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'}$), alors

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2 : (e'_i | e'_j) = C_i(P)^T G(e_1, e_2, \dots, e_p) C_j(P) = L_i(P^T) G(e_1, e_2, \dots, e_p) C_j(P) \quad \therefore \\ G(e'_1, e'_2, \dots, e'_p) = P^T G(e_1, e_2, \dots, e_p) P.$$

La première propriété exprime la bilinéarité du produit scalaire ; les deux suivantes sont des traductions immédiates des définitions. (v) est la formule de changement de base pour les matrices de Gram (et, plus généralement, pour les formes bilinéaires symétriques).

Pour prouver (iv), considérons $y = \sum_{j=1}^p y_j e_j \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p) = F$ et $Y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_p)^T$. Alors,

$$\sum_{j=1}^p y_j C_j(G(e_1, \dots, e_p)) = 0 \iff ((y | e_1) \ \dots \ (y | e_p))^T = 0 \iff y \in F \cap F^\perp \iff y = 0_E.$$

Ainsi, $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est libre si, et seulement si, $y = 0$ entraîne que $Y = 0$, donc si, et seulement si, la famille $(C_j(G))_{1 \leq j \leq p}$ est libre si, et seulement si, G est inversible, ce qui prouve (iv).

6.4. Réduction.

Théorème 2. (Théorème spectral)

1. Tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable en B.O.N. Ainsi, $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)}^\perp E_\lambda(f)$. En particulier, les espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont orthogonaux.

2. Si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice diagonale D et $P \in \mathcal{O}(n)$ telles que $S = PDP^{-1} = PDP^T$. On dit que D et S sont orthogonalement semblables.

D'après l'équivalence entre (ii) et (iii) dans le théorème et la définition 4, le premier point du théorème est une équivalence : un endomorphisme diagonalisable en B.O.N. est autoadjoint. L'existence de B.O.N. montre qu'un endomorphisme diagonalisable est orthodiagonalisable si, et seulement si, ses espaces propres sont orthogonaux.

En pratique, le fait que les espaces propres soient orthogonaux permet de court-circuiter pas mal de calculs explicites d'espaces propres, notamment en petite dimension.

Le théorème spectral sert beaucoup. Un point central est la preuve que $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable : si $SX = \lambda X$ avec $(\lambda, X) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, alors $\overline{X}^T SX = \lambda \overline{X}^T X = \lambda \sum_{i=1}^n |x_i|^2$. Par ailleurs, $\overline{X}^T SX$ est une matrice 1×1 , donc symétrique, d'où $\overline{X}^T SX = (\overline{X}^T SX)^T = X^T S^T \overline{X} = \overline{\overline{X}^T SX}$, d'où $\overline{\lambda} = \lambda$ et le caractère trigonalisable de S .

Corollaire 4. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors, $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ et $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. De même, si f est autoadjoint, il est autoadjoint positif (resp. défini positif) si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

Le théorème spectral donne $A = P^T D P$ avec $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Alors, pour $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y = P X$,

$$X^T A X = X^T P^T D P X = (P X)^T D (P X) = Y^T D Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

Si $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$), on a bien $X^T A X \geq 0$ (resp. $X^T A X > 0$) pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ car X est nul, si, et seulement si, Y l'est. Réciproquement, si $\lambda_{i_0} < 0$ (resp. $\lambda_{i_0} \leq 0$), prendre $X = P^T E_{i_0}$, où E_{i_0} est le vecteur de la base canonique d'indice i_0 , montre que A n'est pas positive (resp. définie positive).

Résumons : une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si, et seulement si, elle est orthoséparable à une matrice diagonale (resp. à une matrice diagonale à diagonale positive, resp. à une matrice diagonale à diagonale strictement positive).

6.4.1. Applications (propriétés à peu près évidentes ou exercices très classiques).

- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire à coefficients positifs. Il en va de même pour $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sous réserve qu'au moins l'un des coefficients soit strictement positif. (Par la définition 8.)
- Si $f \in \mathcal{S}^+(E)$, alors $f^p \in \mathcal{S}^+(E)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et, plus généralement, $P(f) \in \mathcal{S}^+(E)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_+[X]$; si $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$, alors f est inversible et $f^p \in \mathcal{S}^{++}(E)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. (Par la définition 8 ou par le corollaire 4.)
- Si $f \in \mathcal{S}(E)$, alors $\text{Ker}(f)^\perp = \text{Im}(f)$. (Par le théorème et définition 4 - (i).)
- Toute matrice symétrique positive admet une unique racine $p^{\text{ème}}$ symétrique positive. (Par le théorème spectral pour l'existence, par codiagonalisation d'endomorphismes commutant pour l'unicité.)
- Si $f \in \mathcal{S}^+(E)$, alors $\text{Ker}(f) = \{x \in E; (x | f(x)) = 0\}$ et $f|_{\text{Im}(f)} \in \mathcal{S}_n^{++}(\text{Im } f)$. (Se placer dans une B.O.N. de $\overrightarrow{v}$).
- Si $u \in \mathcal{O}(E)$ et $\varphi(x) = \frac{(x | u(x))}{\|x\|^2}$ pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, alors $\varphi(E \setminus \{0_E\}) = \varphi(\mathcal{S}(0, 1)) = [\lambda_1, \lambda_n]$. La première égalité est donnée par $\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \varphi(x)$. Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une B.O.N. de vecteurs propres de u avec $u(e_i) = \lambda_i e_i$ et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, on a $\varphi(e_i) = \lambda_i$ et l'image d'un vecteur de normé appartient à $[\lambda_1, \lambda_n]$. Enfin, pour $\gamma(t) = (1-t)e_1 + te_2$, $\varphi \circ \gamma([0, 1]) = [\lambda_1, \lambda_n]$.
- Si s est une symétrie de E (i.e. $s \in \mathcal{S}(E)$ telle que $s^2 = \text{id}_E$), alors s est autoadjointe si, et seulement si s est une symétrie orthogonale. Similairement, un projecteur de E est autoadjoint si, et seulement si, c'est un projecteur orthogonal. Le cas orthogonal correspond à l'orthogonalité des espaces propres.
- $\mathcal{O}(E) \cap \mathcal{S}(E)$ est l'ensemble des symétries orthogonales.

6.4.2. Application à la réduction simultanée (HP). Si S_1 est symétrique définie positive et S_2 symétrique, il existe une matrice inversible P telle que $P^T S_1 P = I_n$ et $P^T S_2 P$ est diagonale. La matrice S_1 définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ par $(X, Y) \mapsto X^T S_1 Y$. Soit $\mathcal{B}$ une B.O.N. de $\mathbb{R}^n$ relativement à ce produit scalaire. Si P_1 est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$, cela signifie que $P_1^T S_1 P_1 = I_n$ (formule de changement de variable). Posons $S_3 = P_1^T S_2 P_1$. Alors, $S_3 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ car $S_3^T = P_1^T S_2^T P_1^{TT} = S_3$. On peut donc appliquer le théorème spectral à S_3 et il existe une matrice $P_2 \in \mathcal{O}(n)$ telle que $D = P_2^T S_3 P_2$ soit diagonale. Posons enfin $P = P_1 P_2 \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors, $D = P_2^T P_1^T S_2 P_1 P_2 = P^T S_2 P$ et $P^T S_1 P = P_2^T P_1^T S_1 P_1 P_2 = P_2^T I_n P_2 = I_n$. Noter que la diagonale de S_2 porte les valeurs propres de S_3 , qui ne sont pas *a priori* les mêmes que celles de S_2 .

7. APPLICATIONS À LA GÉOMÉTRIE

7.1. **Produit vectoriel.** Dans un espace euclidien orienté E de dimension n , si $(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ est une famille de $n-1$ vecteurs, l'application ψ définie sur E par $v \mapsto [u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, v]$ est une forme linéaire. D'après le théorème 1, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que, pour tout $v \in E$, $\psi(v) = (a | v)$. Ce vecteur a est appelé *produit vectoriel* de $(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ et noté $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_{n-1}$. Pour rester dans le cadre du programme, on suppose dans la suite que $n = 3$ et l'on parle donc du produit vectoriel de deux vecteurs.

Propriétés 6. — L'application $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ est bilinéaire antisymétrique (i.e. $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$).

— $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff (\vec{u}, \vec{v})$ est liée.

— $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2: \vec{u} \wedge \vec{v} \in \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})^\perp$.

— Expression en coordonnées : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ -xz' + x'z \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$.

— Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille orthonormale, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une B.O.N.D de E . C'est utile pour étudier les matrices de $\mathcal{O}(3)$. Ainsi, si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est telle que $\langle C_1(M), C_2(M) \rangle = 0$ et $\|C_1(M)\| = \|C_2(M)\| = 1$, alors

$$M \in \mathcal{O}(3) \iff C_3(M) = \pm C_1(M) \wedge C_2(M) \quad \& \quad M \in \mathcal{SO}(3) \iff C_3(M) = C_1(M) \wedge C_2(M).$$

- $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2: \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\widehat{u, v})|$, d'où $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$.
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\widehat{u, v})|$ est l'aire du parallélogramme (A, B, C, D) où $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$.

7.2. Taxinomie des isométries du plan. Les isométries directes du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (de déterminant 1) sont les rotations. La rotation d'angle θ a pour matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ dans toute B.O.N.D. C'est l'orientation du plan qui définit le signe de θ . En notation complexe, la rotation d'angle θ est la multiplication par $e^{i\theta}$. Les rotations sont à spectre vide (et sont donc non diagonalisables) à l'exception de celles d'angle $\theta \equiv 0[\pi]$ car la rotation d'angle nul est l'identité et celle d'angle π , son opposée.

Les isométries indirectes du plan (de déterminant -1) sont les symétries orthogonales (réflexions) par rapport à une droite. Les symétries orthogonales sont des endomorphismes symétriques. Pour une symétrie orthogonale plane s , il existe une B.O.N. de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice de s dans cette base soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7.3. Taxinomie des isométries de l'espace. Les symétries orthogonales sont des endomorphismes symétriques. Soit s une symétrie orthogonale n'appartenant pas à $\{-\text{id}_E, \text{id}_E\}$. Il existe une B.O.N. de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de s y soit ou bien $\text{diag}(1, 1, -1)$ s'il s'agit d'une réflexion (symétrie par rapport à un plan), ou bien $\text{diag}(1, -1, -1)$ s'il s'agit d'une symétrie par rapport à une droite. Ce cas s'appelle aussi *retournement*, ou rotation d'angle π .

Si la matrice de $u \in \mathcal{O}(3)$ dans une B.O.N. n'est pas symétrique, elle est semblable à une matrice du type ou bien $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, ou bien $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Dans le premier cas, il s'agit de la rotation d'angle θ et d'axe la droite $E_1(u)$ orientée. Dans le deuxième, il s'agit de la composée de cette rotation et de la réflexion par rapport au plan de celle-ci.

Plan d'identification d'une isométrie u de $\mathbb{R}^3$ à partir de sa matrice A en B.O.N.D.

- On vérifie que $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ (on a une similitude s'il existe $a \neq 0$ tel que $aA \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$).
- Si la matrice A est symétrique et différente de $\pm I_3$, alors u est une symétrie orthogonale et A est donc semblable à $\text{diag}(1, 1, -1)$ ou à $\text{diag}(1, -1, -1)$. On détermine dans lequel des cas l'on est en calculant $\text{tr}(A)$, égale à la valeur propre double. On calcule alors l'espace propre associé à cette valeur propre double, qui est nécessairement un plan ; son orthogonal, engendré par le vecteur normal à ce plan, donne la droite propre.
- Si la matrice A n'est pas symétrique, on utilise la relation $C_1(A) \wedge C_2(A) = \pm C_3(A)$. Il suffit de calculer l'une des coordonnées non nulles de ce produit vectoriel pour déterminer s'il s'agit de $C_3(A)$ ou de $-C_3(A)$. Dans le premier cas, on a une rotation, dans le deuxième, la composée (commutative) d'une rotation et de la réflexion par rapport au plan de cette rotation.
- Pour une rotation, on calcule $E_1(A) = \text{Vect}(\vec{e}_1)$; il existe deux choix unitaires de u ; on en fixe un, qui détermine l'orientation de la rotation. L'angle non orienté θ de la rotation est alors donné par la relation $\text{tr}(A) = 1 + 2 \cos \theta$. Le signe de θ est enfin donné par le signe de $\det(\vec{x}, A\vec{x}, \vec{e}_1)$, où $\vec{x}$ est n'importe quel vecteur non colinéaire à $\vec{e}_1$.
- Pour la composée d'une rotation et de la réflexion associée, l'axe est donné par $E_{-1}(A) = \text{Vect}(\vec{e}_1)$, l'angle non orienté par la relation $\text{tr}(A) = -1 + 2 \cos \theta$ et son signe est également celui de $\det(\vec{x}, A\vec{x}, \vec{e}_1)$, où $\vec{x}$ est n'importe quel vecteur non colinéaire à $\vec{e}_1$.

7.4. Complément : formule de Rodrigues. Soit $R_{\vec{e}_1, \theta}$ une rotation de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (avec $\vec{e}_1$ unitaire). Tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ se décompose en $\vec{x} = (\vec{x} | \vec{e}_1) \vec{e}_1 + \vec{y}$ avec $(\vec{e}_1 | \vec{y}) = 0$. Alors, en notant r_θ la rotation d'angle θ dans le plan $\text{Vect}(\vec{e}_1)^\perp$ dûment orienté, on obtient une expression analytique d'une rotation de l'espace :

$$\begin{aligned} R_{\vec{e}_1, \theta}(\vec{x}) &= (\vec{x} | \vec{e}_1) \vec{e}_1 + R_{\vec{e}_1, \theta}(\vec{y}) = (\vec{x} | \vec{e}_1) \vec{e}_1 + r_\theta(\vec{y}) = (\vec{x} | \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\cos \theta) \vec{y} + (\sin \theta) \vec{e}_1 \wedge \vec{y} \\ &= (\cos \theta) \vec{x} + (1 - \cos \theta)(\vec{x} | \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\sin \theta) \vec{e}_1 \wedge \vec{x}. \end{aligned}$$