Concours blanc - PSI* — 2026

Vous traiterez, au choix, l'**un** des trois sujets (et pas un mélange de ces sujets). Il n'est pas absurde de prendre quelques minutes pour parcourir les sujets en diagonale avant d'un choisir un. Si vous changez d'avis en cours de route (ce qui est évidemment fermement déconseillé), barrez les questions traitées du problème abandonné. Un unique sujet par copie sera lu et noté.

On rappelle qu'il est toujours loisible d'utiliser le résultat d'une question antérieure, à condition d'en indiquer la référence et que les théorèmes ont toujours des hypothèses, qu'il est bienvenu de vérifier, et parfois un nom, qu'il est alors pertinent de citer.

Sujet 1 — CCINP, PSI, 2019

Problème 1

Objectifs

Dans la partie I, on considère deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ (*i.e.* de classe $\mathcal{C}^\infty$) et l'on s'interroge sur l'existence d'un développement en série entière sur un voisinage de 0 de ces fonctions. Dans la partie II, indépendante de la première, on démontre un théorème de Borel en construisant, pour toute suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$, une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(0) = b_p$. On note i le nombre complexe de partie imaginaire positive tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

Partie I — Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

On considère la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1-\mathrm{i}tx)}\,\mathrm{d}t$.

Q 1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Q 2. Justifier l'existence de Γ_p pour tout $p \in \mathbb{N}$ et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p. En déduire la valeur de Γ_p pour $p \in \mathbb{N}$.

Q 3. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} \colon f^{(p)}(x) = \mathrm{i}^p \int_0^{+\infty} t^{2p} \mathrm{e}^{-t(1-\mathrm{i}tx)}\,\mathrm{d}t.$$

Q 4. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$. La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

On considère la fonction g définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k(1-\mathrm{i}kx)}$.

Q 5. Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $g^{(p)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$.

Q 6. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\left|g^{(p)}(0)\right| \geqslant p^{2p} \mathrm{e}^{-p}$.

Q 7. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$. La fonction g est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

Partie II — Le théorème de Borel

Q 8. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}\colon \frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-\mathrm{i}} + \frac{b}{x+\mathrm{i}}.$$

Q 9. On considère la fonction Ψ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\Psi(x) = \dfrac{1}{x-\mathrm{i}}$. Montrer par récurrence que
$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}\colon \Psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p\, p!}{(x-\mathrm{i})^{p+1}}.$$

Q 10. Déterminer, pour $p \in \mathbb{N}$, la dérivée p-ième de la fonction φ_1 définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi_1(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Q 11. Montrer que
$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}\colon \left|(x+\mathrm{i})^{p+1} - (x-\mathrm{i})^{p+1}\right| \leqslant 2\left(1+x^2\right)^{\frac{p+1}{2}}.$$
En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leqslant \dfrac{p!}{|x|^{p+1}}$.

Q 12. Pour tout réel α, notons φ_α la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi_\alpha(x) = \dfrac{1}{1+\alpha^2 x^2}$. Montrer que
$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^*\colon \left|\alpha\, \varphi_\alpha^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ par $u_n(x) = \dfrac{a_n x^n}{1+n!\, a_n^2\, x^2}$.

Q 13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\alpha_n = a_n\sqrt{n!}$. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 0$, tout entier $n \geqslant p$ et tout réel x, on a :
$$u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x).$$

Q 14. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, $u_n^{(p)}(0) = 0$ et déterminer $u_n^{(n)}(0)$.

Q 15. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$ et tout réel x, on a
$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}\, p!\, 2^n.$$

Q 16. En déduire que la fonction $U = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Q 17. Montrer que $U(0) = a_0$ et que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $U^{(p)}(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!\, a_p$.

Q 18. Déduire de ce qui précède que, pour tout suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$, il existe une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f^{(p)}(0) = b_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Ce résultat est le *théorème de Borel*. Il a été démontré par Peano et Borel à la fin du XIX^e siècle.

Problème 2

Notations et définitions

— Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$;

— $\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$; si $P \in \mathbb{R}[X]$, on notera encore P la fonction polynomiale associée ;

— $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, et $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$;

— on note I_p la matrice identité de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ et 0_p la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ ne comportant que des 0 ;

— on note χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, c'est-à-dire le polynôme $\det(XI_p - A)$;

— étant donnée une matrice $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de M.

Objectifs

Dans la partie I, on détermine les valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique réelle particulière. On utilise les résultats démontrés dans la partie I pour résoudre, dans la partie II, un système différentiel.

Partie I – Éléments propres d'une matrice

I.1 – Localisation des valeurs propres.

On considère une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soient une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A et un vecteur propre associé $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\}$.

Q 19. Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\lambda x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.

Q 20. Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max\limits_{j \in [\![1,n]\!]} |x_j|$. Montrer que

$$|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|, \quad \text{puis que} \quad |\lambda| \leqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}.$$

Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_n(\alpha,\beta) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_n(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Q 21. Justifier que les valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$ sont réelles.

Q 22. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $A_n(\alpha,\beta)$. Montrer que $|\lambda| \leqslant |\alpha| + 2|\beta|$.

I.2 – Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$.

Q 23. En utilisant la question précédente, montrer que pour toute valeur propre λ de $A_n(0,1)$, il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\lambda = 2\cos(\theta)$.

On note U_n le polynôme $\chi_{A_n(0,1)}(2X)$.

Q 24. Établir, pour $n \geqslant 3$, une relation entre $\chi_{A_n(0,1)}$, $\chi_{A_{n-1}(0,1)}$ et $\chi_{A_{n-2}(0,1)}$. En déduire, pour $n \geqslant 3$, une relation entre U_n, U_{n-1} et U_{n-2}.

Q 25. Montrer par récurrence sur n que

$$\forall \theta \in]0, \pi[: \; U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Q 26. Déduire de la question précédente que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0,1)$ est $\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) ; j \in [\![1, n]\!]\right\}$. Déterminer la multiplicité des valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

Considérons $j \in [\![1, n]\!]$ et posons $\theta_j = \dfrac{j\pi}{n+1}$.

Q 27. Montrer que pour tout vecteur propre $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$,

$$\left\{\begin{array}{rcccll} & - & 2\cos(\theta_j)x_1 & + & x_2 & = 0, & \\ x_{k-1} & - & 2\cos(\theta_j)x_k & + & x_{k+1} & = 0 & \qquad \forall k \in [\![2, n-1]\!], \\ x_{n-1} & - & 2\cos(\theta_j)x_n & & & = 0. & \end{array}\right.$$

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_{k-1} - 2\cos(\theta_j)u_k + u_{k+1} = 0.$$

Q 28. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on précisera la dimension.

Q 29. Déterminer l'ensemble des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$.

Q 30. En déduire l'espace propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$.

Q 31. En déduire, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$ et les espaces propres associés. On distinguera le cas $\beta \neq 0$ du cas $\beta = 0$.

Partie II – Système différentiel

II.1 – Matrices par blocs

On considère A, B, C et D des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que C et D commutent.

Q 32. Calculer le produit par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

L'objectif des trois prochaines questions est de démontrer la relation

$$(1) \qquad \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

Q 33. Montrer l'égalité (1) dans le cas où D est inversible.

Q 34. On ne suppose plus D inversible. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $p \geqslant p_0$, la matrice $D + \dfrac{1}{p} I_n$ soit inversible.

Q 35. En déduire que l'égalité (1) est également vraie dans le cas où D n'est pas inversible.

Considérons une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et formons la matrice par blocs $N = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix}$.

Q 36. Montrer que $\mathrm{Sp}(N) = \{\mu \in \mathbb{C}; \mu^2 \in \mathrm{Sp}(M)\}$.

Q 37. Soient $\mu \in \mathrm{Sp}(N)$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ^2. Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ est vecteur propre de N associé à la valeur propre μ.

Q 38. Montrer que si M est diagonalisable et inversible, alors N est également diagonalisable et inversible.

II.2 – Application à un système différentiel dans le cas où $n = 2$

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'' = -2x_1 + x_2, \\ x_2'' = x_1 - 2x_2. \end{cases} \tag{2}$$

Q 39. Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que le système (2) soit équivalent au système différentiel du premier ordre $X' = BX$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ A_2(\alpha, \beta) & 0_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Que déduit-on du théorème de Cauchy-Lipschitz quant à la structure de l'ensemble des solutions de ce système ?

Q 40. En utilisant la question 36, déterminer les valeurs propres de B et en déduire que B est diagonalisable.

On considère la matrice $D = \mathrm{diag}(-\mathrm{i}\sqrt{3}, \mathrm{i}\sqrt{3}, -\mathrm{i}, \mathrm{i})$.

Q 41. En utilisant la question 37, déterminer une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ dont la première ligne ne comporte que des 1 et telle que $B = PDP^{-1}$.

Q 42. Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel $Y' = DY$, avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$.

Q 43. Déterminer la solution du système différentiel (2) avec conditions initiales

$$(x_1(0), x_2(0), x_1'(0), x_2'(0)) = (1, 0, 0, 0).$$