

# Sujet 2 — Centrale-Supélec PC 2, 2022

Ce sujet en trois parties étudie la convergence des polynômes d'interpolation de Lagrange sous différentes hypothèses et aborde le phénomène de Runge.

La partie I est consacrée à l'étude de deux familles de polynômes, les polynômes de Lagrange et les polynômes de Tchebychev.

La partie II donne des résultats généraux de convergence des polynômes d'interpolation de Lagrange pour des fonctions de classe  $C^\infty$  ; elle utilise également quelques résultats de la partie I.

Enfin la partie III présente le phénomène de Runge. Elle s'appuie sur les sous-parties III.A et III.B, qui portent sur une intégrale généralisée et sont indépendantes des parties I et II.

## Partie I.A — Polynômes d'interpolation de Lagrange (question de cours)

On définit l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto \sum_{k=1}^n P(a_k)Q(a_k) \end{cases}$$

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  une famille de  $n$  réels deux à deux distincts. Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $L_i$  le polynôme de degré  $n-1$  défini par

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

On dit que  $L_1, \dots, L_n$  sont les *polynômes de Lagrange associés* à  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

**Q 1.** Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

**Q 2.** Montrer que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et tout  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ , on a  $\langle L_i, P \rangle = P(a_i)$ .

**Q 3.** Montrer que la famille  $(L_1, \dots, L_n)$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Q 4.** Montrer que, pour tout  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ , on a  $P = \sum_{i=1}^n P(a_i)L_i$ .

**Q 5.** En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-2}[X] : \sum_{i=1}^n P(a_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j)^{-1} = 0.$$

## Partie I.B — Polynômes de Tchebychev de première espèce

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $T_n(X) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} X^{n-2p} (1-X^2)^p$ .

**Q 6.** En développant  $(1+x)^n$  pour deux réels  $x$  bien choisis, montrer que  $\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1}$ .

**Q 7.** Calculer  $T_n$  pour  $n \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ . Montrer que  $T_n$  est un polynôme de degré  $n$ , de même parité que  $n$  et expliciter son coefficient dominant.

**Q 8.** Montrer que  $T_n$  est l'unique polynôme à coefficients réels tel que  $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ .

**Q 9.** Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $y_{k,n} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$ . Montrer que  $T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n (X - y_{k,n})$ .

### Partie I.C — Minimisation d'une norme infinie

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $W$  un polynôme unitaire de degré  $n$ . L'objectif, ici, est de montrer que  $\sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$  ( $\clubsuit$ ) puis d'étudier dans quel cas il y a égalité.

**Q 10.** Montrer que  $\sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = 1$ . En déduire un polynôme unitaire de degré  $n$  réalisant le cas d'égalité dans ( $\clubsuit$ ).

On pose  $Q = \frac{1}{2^{n-1}}T_n - W$  et, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $z_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ .

**Q 11.** Montrer que  $Q$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ .

**Q 12.** On suppose dans cette question que  $\sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$ . Montrer que  $Q(z_k)Q(z_{k+1}) < 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ . En déduire une contradiction et conclure.

**Q 13.** On suppose dans cette question que  $\sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$  (cas d'égalité dans ( $\clubsuit$ )). Montrer que, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $Q(z_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (z_k - z_j)^{-1} \geq 0$ . En appliquant la question 5, en déduire que  $W = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$  et conclure.

### Partie II.A — Interpolation d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Dans cette sous-partie,  $n$  est un entier naturel non nul et  $I = [a, b]$  où  $a < b$ . On munit l'espace vectoriel  $E = \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  de la norme infinie. On considère  $n$  nombres réels distincts  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  de  $I$ . On note  $L_1, \dots, L_n$  les polynômes de Lagrange associés à  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  et l'on note  $W = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$ .

Pour toute fonction  $f$  définie sur  $I$ , le polynôme  $\Pi(f) = \sum_{i=1}^n f(a_i)L_i$  est, en vertu de la question 4, l'unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que  $P(a_i) = f(a_i)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On l'appelle *polynôme interpolateur de Lagrange de  $f$  associé à  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$* .

**Q 14.** Soit  $r \in E$  une fonction s'annulant en  $n+1$  points distincts de  $I$ . Montrer qu'il existe  $c \in I$  tel que  $r^{(n)}(c) = 0$ .

**Q 15.** Soit  $f \in E$ . Soit  $\Pi(f)$  le polynôme interpolateur de  $f$  associé aux réels  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  comme défini ci-dessus. Montrer que

$$\forall x \in I, \exists c \in I: f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} W(x).$$

Pour  $x$  distinct des  $a_i$ , on pourra considérer la fonction  $r$  définie sur  $I$  par  $r(t) = f(t) - P(t) - \kappa W(t)$ , où le réel  $\kappa$  est choisi de façon à ce que  $r(x) = 0$ .

**Q 16.** En déduire que  $\|f - P\|_\infty \leq \frac{M_n}{n!} \|W\|_\infty \leq \frac{M_n (b-a)^n}{n!}$ , où  $M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$ . Cette question est largement utilisée dans la suite du problème.

## Partie II.B — Suites de polynômes interpolateurs

On considère à nouveau un segment  $I = [a, b]$  et une fonction  $f$  définie sur  $I$ . De plus, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on suppose donnés des réels distincts  $a_{1,n} < \dots < a_{n,n}$  de  $I$ . En notant  $L_{1,n}, L_{2,n}, \dots, L_{n,n}$  les polynômes de Lagrange associés à  $(a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{n,n})$  on a donc le polynôme d'interpolation de Lagrange

$$\Pi_n(f) = \sum_{i=1}^n f(a_{i,n})L_{i,n} (\spadesuit), \text{ unique polynôme } P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tel que } P(a_{i,n}) = f(a_{i,n}) \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

On s'intéresse dans cette partie à la convergence uniforme sur  $I$  vers  $f$  de la suite de polynômes  $(\Pi_n(f))_n$  pour divers exemples de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$ .

### Partie II.B.1 — Convergence uniforme vers la fonction exponentielle

Dans cette section,  $I = [a, b]$ , où  $a < b$ , et  $f$  est la restriction à  $I$  de la fonction exponentielle. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère  $\Pi_n(f)$  le polynôme interpolateur comme défini par  $(\spadesuit)$ .

**Q 17.** Montrer que la suite  $(\Pi_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ .

**Q 18.** Montrer qu'il existe une suite de polynômes  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergeant uniformément vers  $f$  sur  $I$  et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I \setminus \{0\}: Q_n(x) \neq \exp(x).$$

### Partie II.B.2 — Convergence uniforme vers une fonction rationnelle

Dans cette section,  $a$  est un réel strictement positif et  $I = [-a, a]$ . Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

**Q 19.** Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ : f^{(k)}(\tan t) = k! \cos^{k+1}(t) \cos \left( (k+1)t + \frac{k\pi}{2} \right).$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère  $\Pi_n(f)$  le polynôme interpolateur de  $f$  sur  $I$  défini par  $(\spadesuit)$ .

**Q 20.** Montrer que, si  $a < 1/2$ , la suite de polynômes  $(\Pi_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[-a, a]$ .

### Partie II.B.3 — Cas de la somme d'une série entière

Soit  $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . On pose

$$\forall x \in ]-R, R[ : f(x) = \sum_{k \geq 0} c_k x^k \quad \text{et} \quad \forall x \in ]-1, 1[ : g(x) = \sum_{k \geq 0} x^k.$$

**Q 21.** Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$  et que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in ]-1, 1[ : g^{(j)}(x) = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}.$$

**Q 22.** Soit  $r \in ]0, R[$ . Montrer qu'il existe  $C_r \in \mathbb{R}$  tel que  $|c_k| \leq \frac{C_r}{r^k}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Q 23.** En déduire que pour tout  $x \in ]-r, r[$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{n! r C_r}{(r - |x|)^{n+1}}$ .

**Q 24.** On suppose que  $a < R/3$ . Montrer que la suite de polynômes  $(\Pi_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[-a, a]$ .

## Partie II.B.4 — Interpolation aux points de Tchebychev

Cette section reprend l'étude des deux sections précédentes dans le cas de points d'interpolation particuliers, liés aux racines  $y_{k,n}$  des polynômes de Tchebychev (partie I.B). On considère  $a > 0$  et  $I = [-a, a]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les points de Tchebychev d'ordre  $n$  dans  $I$  sont :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket : a_{k,n}^* = a \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) = ay_{k,n}.$$

On pose  $W_n^*(X) = \prod_{k=1}^n (X - a_{k,n}^*)$ . Si  $f$  est une fonction définie sur  $I$  et si  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit comme en (♠) le polynôme interpolateur  $P_n^* = \Pi_n^*(f)$  de  $f$  aux points de Tchebychev d'ordre  $n$ . C'est donc l'unique polynôme  $P_n^* \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que  $P_n^*(a_{k,n}^*) = f(a_{k,n}^*)$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Q 25.** Pour tout  $x \in [-a, a]$ , montrer que  $|W_n^*(x)| \leq 2 \left(\frac{a}{2}\right)^n$ .

**Q 26.** On reprend dans cette question la fonction  $f$  étudiée dans la section II.B.2, soit  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que, si  $a < 2$ , la suite  $(\Pi_n^*(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[-a, a]$ .

**Q 27.** On reprend dans cette question la fonction  $f$  somme de série entière étudiée dans la section II.B.3. Montrer que, si  $a < 2R/3$ , la suite  $(\Pi_n^*(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[-a, a]$ .

## Partie III — Phénomène de Runge

### Partie III.A — Étude d'une intégrale généralisée

Pour tout réel  $\alpha > 0$ , on considère la fonction  $h_\alpha : t \mapsto \ln \left( \frac{1-t^2}{\alpha^2+t^2} \right)$ .

**Q 28.** Montrer que  $h_\alpha$  est une fonction continue décroissante intégrable sur  $[0, 1[$ . On pose  $J_\alpha = \int_0^1 h_\alpha(t) dt$ .

**Q 29.** Montrer que  $J_\alpha = 2 \ln(2) - \ln(1+\alpha^2) - 2\alpha \arctan \left( \frac{1}{\alpha} \right)$ .

**Q 30.** Montrer qu'il existe  $\gamma > 0$  tel que  $J_\alpha > 0$  pour tout  $\alpha \in ]0, \gamma[$ .

### Partie III.B — Application à une somme de Riemann

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère dans  $]0, 1[$  les points  $a_{k,n}$  donnés, pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , par  $a_{k,n} = \frac{2k+1}{2n}$  et l'on pose

$$S_n(h_\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h_\alpha(a_{k,n}) = \frac{1}{n} \left[ h_\alpha \left( \frac{1}{2n} \right) + h_\alpha \left( \frac{3}{2n} \right) + \cdots + h_\alpha \left( \frac{2n-1}{2n} \right) \right].$$

**Q 31.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que

$$\int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t) dt + \frac{1}{n} h_\alpha \left( \frac{2n-1}{2n} \right) \leq S_n(h_\alpha) \leq \frac{1}{n} h_\alpha \left( \frac{1}{2n} \right) + \int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t) dt.$$

En déduire que la suite  $(S_n(h_\alpha))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $J_\alpha$ .

**Q 32.** Montrer que

$$\forall \alpha \in ]0, \gamma[ : \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2} = +\infty.$$

### Partie III.C — Le phénomène de Runge

Dans cette sous-partie,  $I = [-1, 1]$  et  $\alpha > 0$ . On considère la fonction  $f_\alpha$  définie sur  $[-1, 1]$  par  $f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^2 + x^2}$ .

On reprend les points  $a_{k,n}$  définis dans la sous-partie III.B, à savoir  $a_{k,n} = \frac{2k+1}{2n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $R_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$  le polynôme interpolateur de  $f_\alpha$  aux  $2n$  réels de  $I \setminus \{\pm a_{k,n}; k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ . Autrement dit,  $R_n$  est l'unique polynôme de degré au plus  $2n-1$  qui coïncide avec  $f_\alpha$  aux points

$$-\frac{2n-1}{2n}, -\frac{2n-3}{2n}, \dots, -\frac{3}{2n}, -\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, \dots, \frac{2n-3}{2n}, \frac{2n-1}{2n}.$$

On pose enfin  $Q_n(X) = 1 - (X^2 + \alpha^2)R_n(X)$ .

**Q 33.** Montrer que  $R_n$  est un polynôme pair et déterminer  $Q_n(i\alpha)$ .

**Q 34.** Montrer qu'il existe  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  tel que  $Q_n(x) = \lambda_n \prod_{k=0}^{n-1} (x^2 - a_{k,n}^2)$ .

**Q 35.** En déduire que, pour tout  $x \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\alpha\}$ ,

$$f_\alpha(x) - R_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2 + \alpha^2} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{x^2 - a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2}.$$

**Q 36.** On suppose que  $\alpha < \gamma$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_\alpha(1) - R_n(1)| = +\infty.$$

**Q 37.** On rappelle que le théorème d'approximation de Weierstraß montre que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. Qu'apportent les trente-six questions précédentes relativement à cette question ?