COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Notations

L'objectif du problème est l'étude de modèles matriciels de dynamique de populations. Nous l'illustrerons avec des populations structurées en âge.
Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Pour des vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_d), y = (y_1, \ldots, y_d)$ de $\mathbb{R}^d$ (qui pourront être des vecteurs lignes ou colonnes dans la suite), on note

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}$$

les normes 1 et 2 usuelles et

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$.
On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls et $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.
Si m et n sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et si A est une partie de $\mathbb{R}$, on note $\mathscr{M}_{m,n}(A)$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes et dont les coefficients sont dans A. Lorsque $m = n$, on note $\mathscr{M}_m(A)$ l'ensemble $\mathscr{M}_{m,m}(A)$.

Les parties 1, 2, 3 et 4 sont dépendantes. Dans l'ensemble du sujet, pour répondre à une question, on pourra admettre les résultats des questions précédentes.

Première partie

Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des vecteurs lignes de taille d à coefficients positifs dont la somme des coordonnées vaut 1 :

$$\mathscr{P} = \left\{ u \in \mathscr{M}_{1,d}(\mathbb{R}_+) : \sum_{j=1}^{d} u_j = 1 \right\}.$$

On considère une matrice carrée $P \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$,

$$\sum_{j=1}^{d} P_{i,j} = 1.$$

On suppose de plus qu'il existe $\nu \in \mathscr{P}$ et $c > 0$ tels que pour tous $i, j \in \{1, \ldots, d\}$,

$$P_{i,j} \geqslant c\nu_j.$$

1. Justifier que $c \leqslant 1$.

2. Montrer que si $u \in \mathscr{P}$, alors $uP \in \mathscr{P}$.

3. Montrer que pour tous $u, v \in \mathscr{P}$,

$$\|uP - vP\|_1 \leqslant (1-c)\|u-v\|_1.$$

(On pourra introduire $R = P - cN$ où $N = (n_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ avec $n_{i,j} = \nu_j$ pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant d$.)

4. Soit $(x_n)_n \in \mathscr{P}^{\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $x_0 \in \mathscr{P}$ et

$$x_{n+1} = x_n P.$$

Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \|x_{n+1} - x_n\|_1$ est convergente.

5. En déduire que $(x_n)_n$ converge vers un élément de $\mathscr{P}$.

6. Montrer qu'il existe un unique élément μ de $\mathscr{P}$ tel que $\mu P = \mu$.

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathscr{P}$,

$$\|xP^n - \mu\|_1 \leqslant 2(1-c)^n.$$

Deuxième partie

Soit $M \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R}_+)$. On suppose que la matrice M possède une valeur propre $\lambda > 0$ et qu'il existe $h \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R}_+^*)$ vecteur colonne tel que :

$$Mh = \lambda h.$$

On suppose aussi qu'il existe $\nu \in \mathscr{P}$ et $c > 0$ tels que pour tous $i, j \in \{1, \ldots, d\}$,

$$M_{i,j} \geqslant c\nu_j.$$

On introduit la matrice $P \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R}_+)$ définie pour $1 \leqslant i, j \leqslant d$ par

$$P_{i,j} = \frac{M_{i,j} h_j}{\lambda h_i}$$

8. Justifier que pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, $\sum_{j=1}^{d} P_{i,j} = 1$.

9. Soit $n \geqslant 1$. Donner une expression des coefficients de P^n en fonction des coefficients de M^n, h et λ.

10a. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathscr{P}$, $C > 0$ et $\gamma \in [0, 1[$, tels que $\mu P = \mu$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \left| \lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - h_i \frac{\mu_j}{h_j} \right| \leqslant C\gamma^n.$$

10b. Prouver qu'il existe un unique $\pi \in \mathscr{P}$ tel que $\pi M = \lambda \pi$.

11. Considérons $(c_0, \ldots, c_{d-1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^d$ et P le polynôme

$$X^d - c_{d-1}X^{d-1} - \cdots - c_1 X - c_0.$$

Montrer que le polynôme P possède une unique racine dans $\mathbb{R}_+^*$.

Considérons $a = (a_1, \ldots, a_d) \in (\mathbb{R}_+^*)^d$ et $b = (b_1, \ldots, b_{d-1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^{d-1}$ et introduisons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{d-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{d-1} \\ a_d & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12a. Justifier qu'il existe un unique couple $(\lambda, \pi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathscr{P}$ tel que $\pi M = \lambda \pi$. On exprimera explicitement π en fonction de a et b et λ.

12b. Montrer qu'il existe un unique $h \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R}_+^*)$ tel que $\langle \pi, h \rangle = 1$ et

$$Mh = \lambda h.$$

12c. En déduire que la suite $(\lambda^{-n} M^n)_{n \geqslant 1}$ converge quand n tend vers l'infini et donner une expression de sa limite en fonction de h et μ.

Troisième partie

Dans toute la suite du sujet, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires du sujet. On admettra que toutes les variables aléatoires introduites peuvent bien être construites sur cet espace. On notera $\mathbb{P}(A)$ la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ et $\mathbb{E}(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles. On note également $\mathrm{Var}(X)$ la variance d'une telle variable aléatoire. Si $A \in \mathscr{A}$ est un évènement, on notera $\mathbf{1}_A$ la variable aléatoire définie comme la fonction indicatrice de cet évènement.

On suppose que pour tous $i, j \in \{1, \ldots, d\}$, $N_{i,j}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que $N_{i,j}^2$ est d'espérance finie. Pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, on introduit la variable aléatoire à valeurs dans $\mathscr{M}_{1,d}(\mathbb{N})$:

$$L_i = (N_{i,1}, \ldots, N_{i,d}).$$

On considère maintenant une famille de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathscr{M}_{1,d}(\mathbb{N})$:

$$(L_i^{n,k} = (L_{i,1}^{n,k}, \ldots, L_{i,d}^{n,k}))_{n \geqslant 1, k \geqslant 1}.$$

De plus, pour tous $i \in \{1, \ldots, d\}$, $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$, on suppose que $L_i^{n,k}$ a même loi que L_i.

Soit $X_0 = (X_{0,i})_{1 \leqslant i \leqslant d}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathscr{M}_{1,d}(\mathbb{N})$ telle que $X_{0,i}^2$ est d'espérance finie pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. Partant de cette valeur initiale, nous définissons par récurrence pour $n \geqslant 0$ une suite de variables aléatoires $X_n = (X_{n,1}, \ldots, X_{n,d})$:

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{X_{n,i}} L_i^{n,k}.$$

La variable $X_{n,i}$ pourra s'interpréter comme le nombre d'individus de type i à la génération n et $L_{i,j}^{n,k}$ comme le nombre d'enfants de type j pour le k-ième individu de type i à la génération n.

On introduit $M \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R}_+)$ la matrice définie pour $i, j \in \{1, \dots, d\}$ par

$$M_{i,j} = \mathbb{E}(N_{i,j}).$$

On introduit $x_n = (x_{n,j})_{1 \leqslant j \leqslant d} \in \mathscr{M}_{1,d}(\mathbb{R}_+)$ défini pour $n \geqslant 0$ et $j \in \{1, \dots, d\}$ par

$$x_{n,j} = \mathbb{E}(X_{n,j}).$$

13a. Montrer que, pour tous $y \in \mathscr{M}_{1,d}(\mathbb{N})$ et $1 \leqslant j \leqslant d$,

$$\mathbb{E}(X_{n+1,j} \mathbf{1}_{X_n = y}) = (yM)_j \mathbb{P}(X_n = y).$$

(On pourra utiliser sans démonstration le fait que les variables aléatoires $L_i^{n,k}$ et $\mathbf{1}_{X_n=y}$ sont indépendantes.)

13b. En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$x_{n+1} = x_n M.$$

14. Soit $\mathscr{I}$ un ensemble fini et $(Y_i)_{i \in \mathscr{I}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes deux à deux, à valeurs réelles et dont les carrés sont d'espérance finie. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i \in \mathscr{I}} Y_i\right)^2\right) = \left(\sum_{i \in \mathscr{I}} \mathbb{E}(Y_i)\right)^2 + \sum_{i \in \mathscr{I}} \mathrm{Var}(Y_i)$$

Pour $u \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, on note $T(u) = (T_i(u))_{1 \leqslant i \leqslant d} \in \mathbb{R}^d$ le vecteur défini par

$$T_i(u) = \mathrm{Var}(\langle L_i, u \rangle) \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, d\}.$$

15a. Montrer que pour tous $u \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, $y \in \mathscr{M}_{1,d}(\mathbb{N})$ et $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}\left(\langle X_{n+1}, u \rangle^2 \mathbf{1}_{X_n = y}\right) = \mathbb{P}(X_n = y)\left(\langle y, Mu \rangle^2 + \langle y, T(u) \rangle\right).$$

(On pourra utiliser sans démonstration le fait que, pour tout $n \geqslant 0$, les variables aléatoires $\sum_{j=1}^{d} u_j L_{i,j}^{n,k} \mathbf{1}_{X_n=y}$ sont deux à deux indépendantes lorsque k et i varient.)

15b. Montrer que pour tous $u \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ et $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}\left(\langle X_{n+1}, u \rangle^2\right) = \mathbb{E}\left(\langle X_n, Mu \rangle^2\right) + \langle x_0 M^n, T(u) \rangle.$$

16. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}\left(\langle X_n, u\rangle^2\right) = \mathbb{E}\left(\langle X_0, M^n u\rangle^2\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \langle x_0 M^k, T(M^{n-1-k}u)\rangle$$

(avec la convention que la somme indexée par k est nulle si $n = 0$).

Quatrième partie

On utilise les notations de la partie précédente. En particulier le symbole M désigne la matrice introduite dans la troisième partie. On suppose maintenant qu'il existe une valeur propre $\lambda > 0$ et un vecteur propre colonne associé $h \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R}_+^*)$:

$$Mh = \lambda h$$

et qu'il existe $\nu \in \mathscr{P}$ et $c > 0$ tels que pour tous $i, j \in \{1, \ldots, d\}$,

$$M_{i,j} \geqslant c\nu_j.$$

17. Montrer qu'il existe $\pi \in \mathscr{P}$ et $h' \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $C > 0$ et $\gamma \in [0, 1[$, tels que $\pi M = \lambda \pi$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \left|\lambda^{-n}(M^n)_{i,j} - h'_i \pi_j\right| \leqslant C\gamma^n.$$

18. On suppose, dans cette question uniquement, que $\lambda \in]0, 1[$. Montrer alors que $\mathbb{E}(\|X_n\|_1)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et $\mathbb{P}(\exists n \geqslant 0 : X_n = 0) = 1$. *On dit que la population s'éteint presque surement en temps fini.*

19a. Montrer qu'il existe $c_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $u \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, on a $\|T(u)\|_1 \leqslant c_0 \|u\|_2^2$.

19b. En déduire l'existence de $c_1 \geqslant 0$ tel que pour tout $u \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, on a $\|T(u)\|_1 \leqslant c_1 \|u\|_1^2$.

20a. Montrer que pour tous $n \geqslant 0$ et $u \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ tel que $\langle u, \pi\rangle = 0$,

$$\|M^n u\|_1 \leqslant C\,(\lambda\gamma)^n\,\|u\|_1.$$

20b. En déduire qu'il existe $C_1 \geqslant 0$ tel que pour tous $n \geqslant 0$ et $u \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ vecteur colonne tel que $\langle u, \pi\rangle = 0$,

$$\mathbb{E}\left(\langle X_n, u\rangle^2\right) \leqslant C_1 \|u\|_1^2 \left(\lambda^{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-k}\gamma^{2n-2k}\right) + (\lambda\gamma)^{2n}\right).$$

On suppose dans le reste de cette partie que $\lambda > 1$ et on introduit le vecteur ligne aléatoire

$$W_n = \lambda^{-n}\left(X_n - \|X_n\|_1 \pi\right).$$

21a. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-k} \gamma^{2n-2k} \right)$ converge.

21b. Soit $w \in (\mathbb{R}_+)^d$ et soit $e_0 = (1, \ldots, 1)$. Montrer que

$$\langle w - \|w\|_1 \pi, \pi \rangle = \langle w, \pi - \langle \pi, \pi \rangle e_0 \rangle$$

et que le vecteur $\pi - \langle \pi, \pi \rangle e_0$ est orthogonal à π.

21c. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{E} \left(\|W_n\|_2^2 \right)$ est convergente. En déduire que la suite $(\mathbb{E}(\|W_n\|_2^2))_{n \geqslant 0}$ tend vers 0. (On pourra par exemple décomposer X_n dans une base orthonormale bien choisie de $\mathbb{R}^d$.)

21d. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P} \left(\|W_n\|_2 \geqslant \varepsilon \right) = 0.$$

22. Montrer que l'évènement $\{ \lim_{n \to +\infty} W_n = 0_{\mathbb{R}^d} \}$ est presque sûr. (On pourra commencer par calculer la probabilité de l'évènement

$$\{ \forall m \geqslant 0,\ \exists k \geqslant m \mid \|W_k\|_2 \geqslant \varepsilon \}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.)