

CORRIGÉ DE SUJET  
X-ENS - FILIÈRE PC - SESSION 2023

17 avril 2023

## I Première partie

**Question 1.** On somme selon  $j \in \llbracket 1; d \rrbracket$  l'inégalité supposée  $P_{i,j} \geq c\nu_j$ , et on obtient :

$$\sum_{j=1}^d P_{i,j} \geq c \sum_{j=1}^d \nu_j \text{ c'est-à-dire } 1 \geq c.$$

**Question 2.** On note  $e$  le vecteur colonne  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ . On note que, pour tout vecteur ligne  $v$  à

coefficients positifs, on a  $v \in \mathcal{P}$  si et seulement si  $ve = 1$ , et que  $Pe = e$ .

Supposons que  $u \in \mathcal{P}$ . Alors :

$$(uP)e = ue = 1$$

ce qui montre que  $uP \in \mathcal{P}$ .

**Question 3.** Soit  $u, v \in \mathcal{P}$ . On note que  $\sum_{k=1}^d (u_k - v_k)\nu_j = 0$  pour tout  $j$ , si bien que, pour tout  $j \in \llbracket 1; d \rrbracket$ ,

$$(uP - vP)_j = \sum_{k=1}^d (u_k - v_k)(P_{k,j} - c\nu_j)$$

Puis, puisque  $P_{k,j} - c\nu_j \geq 0$  :

$$\|uP - vP\|_1 \leq \sum_{k=1}^d |u_k - v_k| \sum_{j=1}^d (P_{k,j} - c\nu_j)$$

ce qui donne

$$\|uP - vP\|_1 \leq (1 - c) \sum_{k=1}^d |u_k - v_k|$$

puisque  $v \in \mathcal{P}$ .

**Question 4.** Le résultat de la question 2 justifie que les termes de la suite  $(x_n)_n$  appartiennent bien à  $\mathcal{P}$ . En itérant l'inégalité de la question précédente (avec  $(u, v) = (x_n, x_{n-1})$  et les précédents), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_{n+1} - x_n\|_1 \leq (1 - c)^n \|x_1 - x_0\|$$

Comme  $(1 - c) \in [0; 1[$ , la série de terme général  $(1 - c)^n$  converge, donc, par majoration, celle de terme général  $\|x_{n+1} - x_n\|_1$  converge également.

**Question 5.** Soit  $j \in \llbracket 1; d \rrbracket$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|x_{n+1,j} - x_{n,j}| \leq \|x_{n+1} - x_n\|_1$$

donc, par majoration et par lien suite-série, la série de terme général  $x_{n+1,j} - x_{n,j}$  converge (à  $j$  fixé). Ainsi, la suite de vecteurs  $(x_n)_n$  converge, composante par composante, donc converge.

De plus,  $\mathcal{P}$  est fermé, car il s'agit de l'image réciproque du singleton  $\{1\}$  (fermé) par l'application  $x \mapsto \sum_{k=1}^d x_k$ , qui est continue, car polynomiale en les composantes de  $x \in \mathbb{R}^d$ .  
Donc  $\lim(x_n) \in \mathcal{P}$ .

**Question 6.** La continuité de l'application  $t \mapsto tP$  sur  $\mathbb{R}^d$  (elle est polynomiale en les composantes de  $t$ ) permet d'obtenir  $\mu = \mu \cdot P$  en passant à la limite  $n \rightarrow +\infty$  dans l'égalité  $x_{n+1} = x_n P$ .

De plus,  $\mu \in \mathcal{P}$ , car  $\mathcal{P}$  est fermé.

Si deux vecteurs  $\mu, \mu'$  conviennent, l'inégalité de la question 3 donne  $\|\mu' - \mu\|_1 \leq (1 - c)\|\mu' - \mu\|_1$ , ce qui n'est possible que si  $\mu = \mu'$  puisque  $c > 0$ .

**Question 7.** Soit  $x \in \mathcal{P}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\|xP^n - \mu\|_1 = \|xP^n - \mu P^n\| \leq (1 - c)^n \|x - \mu\|_1 \leq (1 - c)^n (\|x\|_1 + \|\mu\|_1)$$

par itération de l'inégalité de la question 3. De plus, pour tout  $y \in \mathcal{P}$ , on a

$$\|y\|_1 = \sum_{j=1}^d y_j = 1$$

Ceci donne le facteur 2 recherché dans l'inégalité.

## II Deuxième partie

**Question 8.** Soit  $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$ . On calcule la somme :

$$\sum_{j=1}^d P_{i,j} = \frac{(Mh)_i}{\lambda h_i} = \frac{\lambda h_i}{\lambda h_i} = 1$$

**Question 9.** En notant  $D = \text{Diag}(h_1, \dots, h_d)$ , matrice diagonale inversible, on a :

$$P = \frac{1}{\lambda} D^{-1} M D$$

Ceci donne  $P^n = \frac{1}{\lambda^n} D^{-1} M^n D$ , ou encore, pour tous  $i, j \in \llbracket 1; d \rrbracket$  :

$$P_{i,j}^n = \frac{(M^n)_{i,j} h_j}{\lambda^n h_i}.$$

**Question 10-a.** Pour commencer, les  $h_i$  étant tous  $> 0$ , on peut donc trouver  $c' > 0$  tel que  $P_{i,j} \geq c' \nu_j$  pour tous  $i, j \in \llbracket 1; d \rrbracket$ . Partant de l'inégalité  $P_{i,j} \geq \frac{c h_j}{\lambda h_i} \nu_j$ , il suffit en effet de prendre  $c' = \min_{1 \leq i, j \leq d} \frac{c h_j}{\lambda h_i}$ , qui est bien  $> 0$ .

Ainsi, d'après la partie I, on peut se donner  $\mu \in \mathcal{P}$  (unique) tel que  $\mu P = \mu$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour n'importe quel vecteur  $x \in \mathcal{P}$ , on applique l'inégalité de la question 7 et on obtient :

$$\sum_{j=1}^d \left| \sum_{i=1}^d x_i \left( \frac{h_j}{h_i} \lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - \mu_j \right) \right| \leq 2(1 - c')^n.$$

ou encore :

$$\sum_{j=1}^d \left| \sum_{i=1}^d \frac{h_j}{h_i} x_i \left( \lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - \mu_j \frac{h_i}{h_j} \right) \right| \leq 2(1 - c')^n.$$

En particulier, pour chaque  $j \in \llbracket 1; d \rrbracket$ , on a

$$\left| \sum_{i=1}^d \frac{x_i}{h_i} \left( \lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - \mu_j \frac{h_i}{h_j} \right) \right| \leq \frac{2}{h_j} (1 - c')^n$$

Il suffit alors d'appliquer cette inégalité avec deux vecteurs  $x$  :

— l'un avec des composantes nulles dès que  $\lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - \mu_j \frac{h_i}{h_j} \leq 0$ , égales par ailleurs

— l'autre avec des composantes nulles dès que  $\lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - \mu_j \frac{h_i}{h_j} > 0$ , égales par ailleurs

en notant qu'alors  $x_i \geq \frac{1}{d}$  dès qu'il est non nul, dans les deux cas (puisque  $\sum_{i=1}^d x_i = 1$ ).

On obtient, en sommant les deux inégalités produites :

$$\sum_{i=1}^d \frac{1}{h d} \left| \lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - \mu_j \frac{h_i}{h_j} \right| \leq \frac{4}{h_j} (1 - c')^n$$

où  $h = \max_{1 \leq i \leq d} h_i$ .

Il ne reste plus qu'à sommer sur  $j \in \llbracket 1; d \rrbracket$  pour obtenir l'inégalité voulue, avec

$$C = 4 h d \sum_{j=1}^d \frac{1}{h_j} \text{ et } \gamma = 1 - c' \in [0; 1[.$$

**Question 10-b.** Soit  $\pi \in M_{1,d}(\mathbb{R}_+)$ . L'équation  $\pi M = \lambda M$  équivaut à  $(\pi D) P = \pi D$  (où  $D$  est la matrice introduite dans la réponse à la question 9). Pour chaque  $\pi \in M_d(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$ , on dispose de  $\beta(\pi) \in \mathbb{R}_+^*$  unique tel que  $\frac{1}{\beta(\pi)} \pi D \in \mathcal{P}$  (c'est d'ailleurs  $\beta(\pi) = \|\pi D\|_1$ ).

Comme il existe un unique  $\mu \in \mathcal{P}$  tel que  $\mu P = P$  (résultat de la question 6), on obtient

alors que l'équation  $\pi M = \lambda M$  équivaut à  $\frac{\pi}{\beta(\pi)} D = \mu$ . On trouve donc  $\pi$  nécessairement colinéaire à  $\mu D^{-1}$ .

Réciproquement, en posant  $\pi = \alpha \mu D^{-1}$ , on trouve un unique  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\pi \in \mathcal{P}$  (puisque les composantes de  $\mu D^{-1}$  sont toutes positives). Ceci assure existence et unicité de  $\pi$  tel que recherché.

**Question 11.** On voit que, pour tout  $k \in \llbracket 0; d-1 \rrbracket$ , on a  $P^{(k)}(0) < 0$  et  $P^{(k)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . Par ailleurs, on démontre par récurrence descendante sur  $k \in \llbracket 0; d-1 \rrbracket$  que  $P^{(k)}$  s'annule une seule fois sur  $\mathbb{R}_+^*$  en un certain  $a_k$ , avec  $P^{(k)}$  strictement négatif sur  $]0; a_k[$ .

- Initialisation ( $k = d-1$ ) : on a  $P^{(d-1)} = d! \cdot X - c_{d-1}(d-1)!$  avec  $c_{d-1} > 0$ , donc le résultat apparaît.
- Hérité : soit  $k \in \llbracket 1; d-1 \rrbracket$  tel que la propriété soit vraie au rang  $k$ . Alors  $P^{(k-1)}$  est strictement décroissante sur  $]0; a_k[$  et strictement croissante sur  $]a_k; +\infty[$ , avec  $P^{(k-1)}(0) < 0$  et  $P^{(k-1)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . Donc  $P^{(k-1)}$  s'annule une unique fois sur  $\mathbb{R}_+^*$ , par théorème de la bijection continue, sur  $]a_k; +\infty[$ . En notant  $a_{k-1}$  son point d'annulation,  $P^{(k-1)}$  est de plus strictement négative sur  $]0; a_{k-1}[$  et strictement positive sur  $]a_{k-1}; +\infty[$ .

**Question 12-a.** On pose le système  $\pi M = \lambda \pi$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\pi \in \mathbb{R}^d$ . On obtient les équations suivantes :

$$\sum_{j=1}^d \pi_j a_j = \lambda \pi_1 \text{ et } \forall k \in \llbracket 1; d-1 \rrbracket, b_k \pi_k = \lambda \pi_{k+1} \quad (*)$$

Il est possible de trouver  $\pi \neq 0$  solution de ce système si et seulement si

$$\lambda^d - \sum_{j=1}^d \left[ a_j \prod_{k=1}^{j-1} b_k \right] \lambda^{d-j} = 0$$

Or cette équation polynomiale est exactement de la forme étudiée en question 11, donc elle admet une unique solution  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ .

Prenons un tel  $\lambda$ . D'après les équations, il reste à fixer  $\pi_d$  de telle sorte que

$$\pi_d \cdot \sum_{j=1}^d \frac{\lambda^{d-j}}{\prod_{k=j}^{d-1} b_k} = 1$$

ce qui est possible de manière unique, car le coefficient  $\alpha = \sum_{j=1}^d \frac{\lambda^{d-j}}{\prod_{k=j}^{d-1} b_k}$  est strictement

positif.

Finalement, on dispose bien d'un unique couple  $(\lambda, \pi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{P}$  tel que  $\pi M = \lambda M$  et on a alors

$$\pi = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\lambda^{d-1}}{b_1 \times \cdots \times b_{d-1}}, \frac{\lambda^{d-2}}{b_2 \times \cdots \times b_{d-1}}, \dots, \frac{\lambda}{b_{d-1}}, 1 \right).$$

**Question 12-b.** On applique les résultats des questions 9 à 10-b à la matrice  $M^\top$ , qui vérifie les bonnes conditions :

- $M^\top$  est à coefficients positifs
- on dispose du vecteur  $\pi^\top \in \mathcal{P}$ , de la question précédente, tel que  $M^\top \pi^\top = \lambda \pi^\top$
- le vecteur  $\pi^\top$  a toutes ses composantes strictement positives
- il s'agit de trouver  $\nu \in \mathcal{P}$  et  $c > 0$  tels que  $\forall i, j \in \llbracket 1; d \rrbracket, M_{i,j}^\top \geq c \nu_j$ , et, pour cela, il suffit de prendre  $\nu = \left( \frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d} \right)$  et  $c = d \cdot \min(a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_{d-1})$ , qui est bien strictement positif.

Ainsi, on dispose d'un (unique)  $\mu \in \mathcal{P}$  tel que  $\mu M^\top = \lambda \mu$ . On pose alors  $h = \mu^\top$  et on a alors  $Mh = \lambda h$ .

Montrons que les composantes de  $h$  sont strictement positives. Supposons par l'absurde qu'on dispose de  $k \in \llbracket 1; d \rrbracket$  tel que  $h_k = 0$  et supposons  $k$  minimal. Si  $k = 1$  alors la dernière ligne du produit  $Mh = \lambda h$  donne  $h_d = 0$ . Puis, la précédente donne  $h_{d-1} = 0$ . Par conséquent, tout le vecteur  $h$  est nul, ce qui est absurde.

Supposons  $k \geq 2$ . Alors la  $k$ -ième ligne du produit matriciel donne  $a_k h_1 + b_k h_{k+1} = 0$ . Par positivité de tous les termes et stricte positivité de  $a_k$  et  $b_k$ , ceci implique  $h_1 = 0$ , ce qui est absurde.

Concernant la condition sur le produit scalaire, puisque  $\pi \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$  et  $h \in (\mathbb{R}_+^*)^d$ , on a  $\langle \pi, h \rangle > 0$ . Il suffit donc de modifier  $h$  d'un facteur  $\alpha$  adéquat pour aboutir à  $\langle \pi, h \rangle = 1$ .

L'existence de  $h$  tel que recherché est désormais démontrée.

Concernant l'unicité, si  $h$  et  $h'$  conviennent, alors on dispose de  $\beta, \beta' \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $\beta h$  et  $\beta' h'$  appartiennent à  $\mathcal{P}$ . Or le vecteur  $\mu$  tel que  $\mu M^\top = \lambda \mu$  est unique, donc  $h$  et  $h'$  sont colinéaires. Dès lors, l'égalité entre  $h$  et  $h'$  résulte de ce que  $\langle \pi, h \rangle = \langle \pi, h' \rangle = 1$ .

**Question 12-c.** L'inégalité de la question 10-a devient disponible, dans laquelle on fait tendre  $n \rightarrow +\infty$ . On obtient alors

$$\lambda^{-n} M^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} h_i \frac{\mu_j}{h_j} \\ \vdots \\ h_i \frac{\mu_j}{h_j} \end{pmatrix}_{1 \leq i, j \leq d}.$$

### III Troisième partie

**Question 13-a.** Soit  $y \in M_{1,d}(\mathbb{N})$  et  $j \in \llbracket 1; d \rrbracket$ . Sous réserve d'existence, on écrit :

$$\begin{aligned} E(X_{n+1,j} \mathbb{I}_{X_n=y}) &= \sum_{i=1}^d E \left[ \sum_{k=1}^{X_{n,i}} L_{i,j}^{n,k} \mathbb{I}_{X_n=y} \right] \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{y_i} E(L_{i,j}^{n,k} \mathbb{I}_{X_n=y}) \end{aligned}$$

Or, l'expression de  $X_n$  ne dépend que des variables  $L_i^{p,k}$  avec  $p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , donc, par lemme des coalitions :

$$\begin{aligned}
 E(X_{n+1,j} \mathbb{I}_{X_n=y}) &= \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{y_i} E(L_{i,j}^{n,k}) E(\mathbb{I}_{X_n=y}) \\
 &= \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{y_i} E(N_{i,j}) P(X_n = y) \\
 &= \sum_{i=1}^d y_i M_{i,j} P(X_n = y) \\
 &= (yM)_j P(X_n = y).
 \end{aligned}$$

Comme les variables en jeu sont positives, le calcul légitime l'existence de l'espérance.

**Question 13-b.** Il suffit de sommer pour  $y \in X_n(\Omega)$ , sous réserve d'existence, en notant que

$$\sum_{y \in X_n(\Omega)} \mathbb{I}_{[X_n=y]} = 1.$$

Ainsi, pour  $j \in \llbracket 1; d \rrbracket$  :

$$\begin{aligned}
 x_{n+1,j} &= E(X_{n+1,j}) \\
 &= \sum_{y \in X_n(\Omega)} E(X_{n+1,j} \mathbb{I}_{X_n=y}) \\
 &= \sum_{y \in X_n(\Omega)} (yM)_j P(X_n = y) \\
 &= \sum_{y \in X_n(\Omega)} (yM)_j P(X_n = y) \\
 &= E((X_n M)_j) \text{ par théorème de transfert} \\
 &= (x_n M)_j \text{ par linéarité de l'espérance.}
 \end{aligned}$$

Le calcul est légitime pour les mêmes raisons que précédemment : tous les termes en jeu sont positifs.

Ceci étant vrai pour tout  $j \in \llbracket 1; d \rrbracket$ , on a  $x_{n+1} = x_n M$ .

**Question 14.** On note que, pour tous  $i, j \in \mathcal{I}$ ,  $Y_i Y_j$  admet une espérance, puisque

$$|Y_i Y_j| \leq \frac{Y_i^2 + Y_j^2}{2}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
E \left[ \left( \sum_{i \in \mathcal{I}} Y_i \right)^2 \right] &= \sum_{i,j \in \mathcal{I}} E(Y_i Y_j) \\
&= \sum_{i \neq j \in \mathcal{I}} E(Y_i) E(Y_j) + \sum_{i \in \mathcal{I}} E(Y_i^2) \text{ par indépendance} \\
&= \sum_{i \neq j \in \mathcal{I}} E(Y_i) E(Y_j) + \sum_{i \in \mathcal{I}} [Var(Y_i) + E(Y_i)^2] \\
&= \sum_{i,j \in \mathcal{I}} E(Y_i) E(Y_j) + \sum_{i \in \mathcal{I}} Var(Y_i) \\
&= \left( \sum_{i \in \mathcal{I}} E(Y_i) \right)^2 + \sum_{i \in \mathcal{I}} Var(Y_i).
\end{aligned}$$

**Question 15-a.** Soit  $u \in M_{d,1}(\mathbb{R})$  et  $y \in M_{1,d}(\mathbb{N})$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a, sous réserve d'existence :

$$\begin{aligned}
E(\langle X_{n+1}, u \rangle^2 \mathbb{I}_{X_n=y}) &= E \left[ \left( \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{y_i} u_j L_{i,j}^{n,k} \mathbb{I}_{X_n=y} \right)^2 \right] \\
&= E \left[ \left( \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{y_i} u_j L_{i,j}^{n,k} \right)^2 \right] E[\mathbb{I}_{X_n=y}] \\
&= E \left[ \left( \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{y_i} u_j L_{i,j}^{n,k} \right)^2 \right] P(X_n = y)
\end{aligned}$$

par indépendance de l'événement  $[X_n = y]$  vis-à-vis des variables aléatoires  $L_{i,j}^{n,k}$ .

Les variables  $\sum_{j=1}^d u_j L_{i,j}^{n,k} \mathbb{I}_{X_n=y}$  sont indépendantes pour  $i$  et  $k$  variant. On peut donc utiliser l'identité montrée à la question 14 avec l'ensemble fini suivant :

$$\mathcal{I} = \{(i, k) \in \mathbb{N}^2 : i \in \llbracket 1; d \rrbracket \text{ et } (\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket, k \in \llbracket 1; y_i \rrbracket)\}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
E(\langle X_{n+1}, u \rangle^2 \mathbb{I}_{X_n=y}) &= P(X_n = y) \cdot \left[ \left( \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{y_i} E \left[ \sum_{j=1}^d u_j L_{i,j}^{n,k} \right] \right)^2 + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{y_i} Var \left[ \sum_{j=1}^d u_j L_{i,j}^{n,k} \right] \right] \\
&= P(X_n = y) \left[ \left( \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{y_i} \sum_{j=1}^d u_j M_{i,j} \right)^2 + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{y_i} Var \left[ \sum_{j=1}^d u_j L_{i,j} \right] \right] \\
&= P(X_n = y) \left[ \left( \sum_{i=1}^d y_i (Mu)_i \right)^2 + \sum_{i=1}^d y_i T(u)_i \right] \\
&= P(X_n = y) \left[ \langle y, Mu \rangle^2 + \langle y, T(u) \rangle \right]
\end{aligned}$$

Tous ces calculs sont effectués sous réserve d'existence, mais celle-ci est légitimée par le fait que ces calculs aboutissent et concernent des variables aléatoires positives.

**Question 15-b.** Cette fois encore, on somme sur  $y \in X_n(\Omega)$  l'égalité obtenue à la question précédente, en utilisant le théorème de transfert pour  $X_n$  :

$$E(\langle X_{n+1}, u \rangle^2) = E(\langle X_n, Mu \rangle^2) + E(\langle X_n, T(u) \rangle).$$

Or, par linéarité de l'espérance :

$$E(\langle X_n, T(u) \rangle) = \langle E(X_n), T(u) \rangle$$

puis,  $x_n = x_0 M^n$  en itérant la relation obtenue à la question 13-b.

Finalement :

$$E(\langle X_n, T(u) \rangle) = \langle x_0 M^n, T(u) \rangle$$

ce qui donne la relation attendue.

**Question 16.** On démontre ceci par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , avec une initialisation évidente. Supposons l'égalité établie au rang  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $u \in \mathbb{R}^d$ . On repart du résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} E(\langle X_{n+1}, u \rangle^2) &= E(\langle X_n, Mu \rangle^2) + \langle x_0 M^n, T(u) \rangle \\ &= E(\langle X_0, M^{n+1} u \rangle^2) + \sum_{k=0}^{n-1} \langle x_0 M^k, T(M^{n-1-k} Mu) \rangle + \langle x_0 M^n, T(u) \rangle \\ &= E(\langle X_0, M^{n+1} u \rangle^2) + \sum_{k=0}^n \langle x_0 M^k, T(M^{n-k} u) \rangle \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

## IV Quatrième partie

**Question 17.** Reprenons les résultats du début de la seconde partie, aux questions 9, 10-a et 10-b. Avec ces résultats, on trouve un vecteur  $\mu \in \mathcal{P}$ , des constantes  $C > 0$  et  $\gamma \in [0; 1[$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \left| \lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - h_i \frac{\mu_j}{h_j} \right| \leq C \gamma^n$$

On trouve ensuite un unique vecteur  $\pi \in \mathcal{P}$  tel que  $\pi M = \lambda \pi$ . Ce vecteur  $\pi$ , dans la réponse apportée à la question 10-b, est colinéaire au vecteur  $\left( \frac{\mu_1}{h_1}, \dots, \frac{\mu_d}{h_d} \right)$ . Soit  $\alpha > 0$

tel que  $\pi = \alpha \cdot \left( \frac{\mu_1}{h_1}, \dots, \frac{\mu_d}{h_d} \right)$ .

Alors on obtient le résultat voulu en prenant ce vecteur  $\pi$  et en posant  $h'_i = \frac{h_i}{\alpha}$ , qui est

bien  $> 0$  pour tout  $i \in \llbracket 0; d \rrbracket$ .

**Question 18.** On note que  $E(\|X_n\|_1) = \sum_{k=1}^d x_{n,k} = x_n e$  où  $e = (1, \dots, 1)^\top$ . Ainsi :

$$E(\|X_n\|_1) = x_0 M^n e.$$

Or, la majoration de la question précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d |(M^n)_{i,j} - \lambda^n h'_i \pi_j| \leq C(\gamma\lambda)^n$$

Ceci montre que  $(M^n)_{i,j} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  pour tous  $i, j \in \llbracket 1; d \rrbracket$ .

Ainsi  $E(\|X_n\|_1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Pour le second résultat, les  $X_n$  sont à valeurs dans  $\mathbb{N}^d$ . On a, par inégalité de Markov, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [X_k \neq 0]\right) \leq P(X_n \neq 0) \leq P(\|X_n\|_1 \geq 1) \leq E(\|X_n\|_1)$$

En faisant tendre  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient  $P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [X_k \neq 0]\right) = 0$ . Ainsi, l'événement  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [X_k = 0]$  est presque sûr, ce qui donne le résultat.

**Question 19-a.** Soit  $u \in M_{d,1}(\mathbb{R})$ . On a  $T(u)_i = \text{Var}(\langle L_i, u \rangle)$  pour tout  $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$ . Or, pour tout  $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$ ,

$$\text{Var}(\langle L_i, u \rangle) \leq E(\langle L_i, u \rangle^2) \leq E(\|L_i\|_2^2) \|u\|_2^2$$

(on a appliqué successivement la formule de Koenig-Huygens et l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

En posant  $c_0 = \sum_{i=1}^d E(\|L_i\|_2^2)$ , on obtient bien

$$\forall u \in M_{d,1}(\mathbb{R}), \|T(u)\|_1 = \sum_{i=1}^d \text{Var}(\langle L_i, u \rangle) \leq c_0 \|u\|_2^2.$$

**Question 19-b.** Il suffit de noter que, pour tout  $u \in M_{d,1}(\mathbb{R})$ , on a

$$\|u\|_2^2 = \sum_{i=1}^d u_i^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq d} |u_i| |u_j| = \left( \sum_{k=1}^d |u_k| \right)^2$$

Ainsi, en reprenant  $c_1 = c_0$ , on obtient

$$\forall u \in M_{d,1}(\mathbb{R}), \|T(u)\|_1 \leq c_1 \|u\|_1^2.$$

*Remarque :* on pouvait aussi utiliser l'équivalence des normes dans  $\mathbb{R}^d$ .

**Question 20-a.** Soit  $u \in M_{d,1}(\mathbb{R})$  tel que  $\langle \pi, u \rangle = 0$ . En particulier, on a

$$\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket, \sum_{j=1}^d \lambda^n h'_i \pi_j u_j = 0.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|M^n u\|_1 &= \sum_{i=1}^d \left| \sum_{j=1}^d (M^n)_{i,j} u_j - \sum_{j=1}^d \lambda^n h'_i \pi_j u_j \right| \\ &= \sum_{i=1}^d \left| \sum_{j=1}^d ((M^n)_{i,j} - \lambda^n h'_i \pi_j) u_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d |(M^n)_{i,j} - \lambda^n h'_i \pi_j| |u_j| \\ &\leq \lambda^n \|u\|_1 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d |\lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - h'_i \pi_j| \\ &\leq C (\lambda \gamma)^n \|u\|_1. \end{aligned}$$

**Question 20-b.** On va utiliser conjointement les résultats des questions 16, 19-b et 20-a. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $u \in M_{d,1}(\mathbb{R})$  avec  $\langle \pi, u \rangle = 0$ . On part de l'égalité suivante :

$$E(\langle X_n, u \rangle^2) = E(\langle X_0, M^n u \rangle^2) + \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle x_0 M^k, T(M^{n-1-k} u) \right\rangle$$

Tout d'abord, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$E(\langle X_0, M^n u \rangle^2) \leq \|M^n u\|_2^2 \cdot E(\|X_0\|_2^2)$$

Par équivalence des normes dans  $\mathbb{R}^d$ , et en utilisant 20-a, on dispose d'une première constante  $K_1$  (indépendante de  $n$  et de  $u$ ) telle que

$$E(\langle X_0, M^n u \rangle^2) \leq K_1 (\lambda \gamma)^{2n} \|u\|_1^2.$$

Il faut désormais s'occuper des termes de la somme. On fixe  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  et on décompose :

$$x_0 = \alpha \pi + u_0$$

décomposition sur la somme directe orthogonale  $\mathbb{R} \cdot \pi \oplus (\mathbb{R} \cdot \pi)^\perp$ .

Alors :

$$\begin{aligned} \left| \left\langle x_0 M^k, T(M^{n-1-k} u) \right\rangle \right| &\leq |\alpha| \left| \left\langle \pi M^k, T(M^{n-1-k} u) \right\rangle \right| + |\beta| \left| \left\langle u_0 M^k, T(M^{n-1-k} u) \right\rangle \right| \\ &\leq \lambda^k |\alpha| \left| \left\langle \pi, T(M^{n-1-k} u) \right\rangle \right| + |\beta| \left| \left\langle u_0 M^k, T(M^{n-1-k} u) \right\rangle \right| \end{aligned}$$

Pour le second terme, on peut effectuer la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \left| \left\langle u_0 M^k, T(M^{n-1-k} u) \right\rangle \right| &\leq \|u_0 M^k\|_1 \cdot \|T(M^{n-1-k} u)\|_1 \text{ car composantes positives} \\ &\leq C (\lambda \gamma)^k \|u_0\|_1 \cdot c_1 \|M^{n-1-k} u\|_1^2 \end{aligned}$$

et on utilise alors 20-a pour obtenir une nouvelle constante  $K_2$ , indépendante de  $n$ , de  $u$  et de  $k$ , telle que

$$|\langle u_0 M^k, T(M^{n-1-k}u) \rangle| \leq K_2 \cdot \|u\|_1^2 \cdot \lambda^{2n-k} \gamma^{2n-k}$$

(en l'occurrence :  $K_2 = C^2 \times (\lambda\gamma)^{-2} \times c_1$ ).

On peut reprendre les mêmes idées pour majorer le terme  $|\alpha \langle \pi, T(M^{n-1-k}u) \rangle|$  :

$$\begin{aligned} |\alpha \langle \pi, T(M^{n-1-k}u) \rangle| &\leq |\alpha| \cdot \|\pi\|_1 \cdot \|T(M^{n-1-k}u)\|_1 \\ &\leq |\alpha| \cdot c_1 \|M^{n-1-k}u\|_1^2 \\ &\leq K_3 \cdot \|u\|_1^2 \cdot \lambda^{2n-2k} \gamma^{2n-2k} \end{aligned}$$

où  $K_3$  est une constante réelle positive.

Comme  $\gamma^{2n-2k} \geq \gamma^{2n-k}$ , on obtient

$$\begin{aligned} |\langle x_0 M^k, T(M^{n-1-k}u) \rangle| &\leq \|u\|_1^2 (K_3 + |\beta| K_2 \gamma^k) \lambda^{2n-k} \gamma^{2n-2k} \\ &\leq \|u\|_1^2 (K_3 + |\beta| K_2) \lambda^{2n-k} \gamma^{2n-2k} \end{aligned}$$

On pose alors  $C_1 = K_1 + |\beta| K_2 + K_3$  et on obtient, pour tous  $u \in M_{d,1}(\mathbb{R})$  avec  $\langle \pi, u \rangle = 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$E(\langle X_n, u \rangle^2) \leq C_1 \|u\|_1^2 \left( \lambda^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-k} \gamma^{2n-2k} + (\lambda\gamma)^{2n} \right).$$

**Question 21-a.** Il s'agit du produit de Cauchy des séries  $\sum_{n \geq 1} \lambda^{-n}$  et  $\sum_{n \geq 1} \gamma^{2n}$ , qui convergent toutes les deux (absolument). On trouve donc que la série de terme général  $\sum_{k=0}^n \lambda^{-k} \gamma^{2(n-k)}$  converge, donc celle proposée par l'énoncé également (puisque le terme général est à un facteur  $\gamma^2$  près).

**Question 21-b.** On calcule le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle w - \|w\|_1 \pi, \pi \rangle &= \sum_{i=1}^d w_i \pi_i - \sum_{i=1}^d w_i \sum_{j=1}^d \pi_j^2 \\ &= \sum_{i=1}^d w_i \left( \pi_i - \sum_{j=1}^d \pi_j^2 \right) \\ &= \langle w, \pi - \|\pi\|_2^2 e_0 \rangle. \end{aligned}$$

Concernant l'orthogonalité :

$$\langle \pi - \|\pi\|_2^2 e_0, \pi \rangle = \|\pi\|_2^2 - \|\pi\|_2^2 \langle \pi, e_0 \rangle$$

avec  $\langle \pi, e_0 \rangle = 1$  car  $\pi \in \mathcal{P}$ .

**Question 21-c.** Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . On décompose  $X_n$  sur une base orthonormée  $(u_1, \dots, u_d)$  de  $\mathbb{R}^d$  avec  $u_1$  positivement colinéaire à  $\pi$ . On dispose donc de  $\alpha > 0$  (indépendant de  $n$ ) tel que  $u_1 = \alpha\pi$ .

On a alors  $\|W_n\|_2^2 = \lambda^{-2n} \left( \langle X_n - \|X_n\|_1\pi, \alpha\pi \rangle^2 + \sum_{i=2}^d \langle X_n, u_i \rangle^2 \right)$  si bien que :

$$E(\|W_n\|_2^2) = \lambda^{-2n} \cdot E(\langle X_n - \|X_n\|_1\pi, \alpha\pi \rangle^2) + \lambda^{-2n} \cdot \sum_{i=2}^d E(\langle X_n, u_i \rangle^2)$$

La majoration de la question 20-b (applicable, car  $u_i \perp \pi$  pour tout  $i \in \llbracket 2; d \rrbracket$ ) et la convergence de la question 21-a montrent que la série de terme général  $\lambda^{-2n} E(\langle X_n, u_i \rangle^2)$  converge pour tout  $i \in \llbracket 2; d \rrbracket$ .

Il reste à nous occuper du premier terme. Or d'après le résultat de la question 21-b,

$$\lambda^{-2n} \cdot E(\langle X_n - \|X_n\|_1\pi, \alpha\pi \rangle^2) = \alpha^2 \lambda^{-2n} \cdot E(\langle X_n, \pi - \langle \pi, \pi \rangle e_0 \rangle^2)$$

Comme le vecteur  $\pi - \langle \pi, \pi \rangle e_0$  est orthogonal à  $\pi$ , la majoration de la question 20-b s'applique à nouveau, ce qui entraîne la convergence de la série de terme général  $\lambda^{-2n} \cdot E(\langle X_n - \|X_n\|_1\pi, \alpha\pi \rangle^2)$ .

Par combinaison linéaire, la série de terme général  $E(\|W_n\|_2^2)$  converge. Il en découle directement que  $E(\|W_n\|_2^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Question 21-d.** On utilise l'inégalité de Markov, pour  $\varepsilon > 0$  :

$$P(\|W_n\|_2 \geq \varepsilon) = P(\|W_n\|_2^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(\|W_n\|_2^2)}{\varepsilon^2}$$

et on fait tendre  $n \rightarrow +\infty$  en utilisant la conclusion de la question précédente.

**Question 22.** On s'intéresse à l'événement  $A_\varepsilon = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq m} [\|W_k\|_2 \geq \varepsilon]$ , pour  $\varepsilon > 0$ . On note que

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(\|W_k\|_2 \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\|W_k\|_2^2)}{\varepsilon^2}$$

ce qui montre que la série de terme général  $P(\|W_k\|_2 \geq \varepsilon)$  converge, d'après le résultat de la question 21-c.

Ainsi, comme

$$P\left(\bigcup_{k \geq m} [\|W_k\|_2 \geq \varepsilon]\right) \leq \sum_{k=m}^{+\infty} P(\|W_k\|_2 \geq \varepsilon)$$

on a donc que  $P\left(\bigcup_{k \geq m} [\|W_k\|_2 \geq \varepsilon]\right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi, par continuité décroissante,  $P(A_\varepsilon) = 0$ .

Pour conclure, on séquentialise le problème en appliquant le résultat ci-dessus à  $\varepsilon = 2^{-N}$  pour  $N \in \mathbb{N}$ . Ainsi :

$$P(\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0) = P\left(\overline{\bigcup_{N>0} A_{2^{-N}}}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{N>0} \overline{A_{2^{-N}}}\right)$$

Or l'événement  $\bigcap_{N>0} \overline{A_{2^{-N}}}$  est une intersection d'événements presque sûrs, donc

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 0) = 1.$$