

Sujet 2 — Centrale-Supélec PC 2, 2022

Partie I.A — Polynômes d'interpolation de Lagrange (question de cours)

On définit l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto \sum_{k=1}^n P(a_k)Q(a_k) \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (a_1, \dots, a_n) une famille de n réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note L_i le polynôme de degré $n - 1$ défini par

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Q 1. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie, trivialement bilinéaire et symétrique. Pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, le produit scalaire $\langle P, P \rangle = \sum_{k=1}^n P(a_k)^2$ est toujours positif et est nul si, et seulement si, $P(a_k) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors, P est un polynôme de degré au plus $n - 1$ possédant au moins n racines, vu qu'on a supposé les a_k deux à deux distincts. On a donc $P = 0$, ce qui montre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit bien un produit scalaire.

Q 2. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a

$$\langle L_i, P \rangle = \sum_{k=1}^n L_i(a_k)P(a_k) = \sum_{k=1}^n P(a_k) \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{a_k - a_j}{a_i - a_j} = \sum_{k=1}^n P(a_k) \delta_{i,k} = P(a_i).$$

Q 3. Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on calcule, en appliquant la question précédente,

$$\langle L_i, L_j \rangle = L_j(a_i) = \delta_{i,j},$$

ce qui montre bien que la famille (L_1, \dots, L_n) est orthonormée. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls étant libre et celle-là comptant $n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$ éléments, les polynômes de Lagrange forment donc une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Q 4. Pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, l'expression d'un vecteur en B.O.N. donne $P = \sum_{i=1}^n \langle P, L_i \rangle L_i = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i$.

Alternativement, on peut poser $Q = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i$ et noter que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket : Q(a_k) = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i(a_k) = \sum_{i=1}^n P(a_i) \delta_{i,k} = P(a_k).$$

Ainsi, $P - Q$ est un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui admet au moins n racines distinctes (les a_k), donc il est nul : $P = Q$.

Q 5. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X] \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. L'expression ci-dessus donne

$$P = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i = \sum_{i=1}^n P(a_i) \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)^{-1} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (X - a_j) = \sum_{i=1}^n P(a_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j)^{-1} X^{n-1} + R$$

avec $R \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Le coefficient de X^{n-1} est donc nul, soit $\sum_{i=1}^n P(a_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j)^{-1} = 0$.

Partie I.B — Polynômes de Tchebychev de première espèce

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} X^{n-2p} (1-X^2)^p$.

Q 6. La formule du binôme de Newton donne

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} [(1+1)^n + (-1+1)^n] = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{1+(-1)^i}{2} = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p},$$

soit $\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1}$.

Q 7. À partir de l'expression de l'énoncé, on calcule

$$T_0 = 1, T_1 = X, T_2 = X^2 - (1-X^2) = 2X^2 - 1 \text{ \& } T_3 = X^3 - 3X(1-X^2) = 4X^3 - 3X.$$

Par ailleurs, T_n est une combinaison linéaire des polynômes $X^{n-2p}(1-X^2)^p$ avec X^{n-2p} de même parité que n et $(1-X^2)^p$ polynôme pair, donc une combinaison linéaire de polynômes de même parité que n , ce qui montre que T_n est de même parité que n .

Le terme de plus haut degré de $X^{n-2p}(1-X^2)^p$ est $(-1)^p X^n$, ce qui montre que $\deg(T_n) \leq n$ avec comme coefficient de X^n la somme $\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} (-1)^p = 2^{n-1}$ d'après la question Q 6. *In fine*, $\deg(T_n) = n$ et est de coefficient dominant 2^{n-1} . Si l'on veut se rassurer, ces propriétés se vérifient immédiatement pour $n \leq 3$.

Q 8. Pour $(n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, la formule de Moivre donne

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \operatorname{Re}[(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n] = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta) \cos^{n-k}(\theta) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} i^{2p} \sin^{2p}(\theta) \cos^{n-2p}(\theta) \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(\theta) (1 - \cos^2(\theta))^p = T_n(\cos(\theta)). \end{aligned}$$

L'unicité est évidente car si \tilde{T}_n convient également, on a $T_n(\cos(\theta)) = \tilde{T}_n(\cos(\theta))$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, soit $(T_n - \tilde{T}_n)(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$ et, donc $T_n - \tilde{T}_n = 0_{\mathbb{R}[X]}$, seul le polynôme nul ayant une infinité de racines.

Notons que les polynômes de Tchebychev peuvent aussi être définis par $T_0 = 1, T_1 = X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} + T_n$. On en démontre alors les mêmes propriétés principalement par récurrence.

Q 9. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $y_{k,n} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$. Posons $\tilde{T}_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n (X - y_{k,n})$. Alors, $\deg(\tilde{T}_n) = n = \deg(T_n)$ et, d'après la question 8,

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket: T_n(y_{k,n}) = \cos\left(n \frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right) = 0 = \tilde{T}_n(y_{k,n}).$$

Par ailleurs, $y_{k,n} \in \left[\frac{\pi}{2n}, \frac{(2n-1)\pi}{2n}\right] \subset [0, \pi]$ et $\cos|_{[0,\pi]}$ est strictement décroissante, donc les $y_{k,n}$ sont deux à deux distincts. Ainsi, T_n et \tilde{T}_n ont n racines communes et même degré n , donc sont proportionnels. De même coefficient dominant, ils sont égaux.

Partie I.C — Minimisation d'une norme infinie

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et W un polynôme unitaire de degré n . L'objectif, ici, est de montrer que $\sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ (\diamond) puis d'étudier dans quel cas il y a égalité.

Q 10. Comme l'image de \mathbb{R} par la fonction cosinus est $[-1, 1]$, on a

$$\sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |T_n(\cos(\theta))| \stackrel{(\text{Q } 8)}{=} \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |\cos(n\theta)| = 1.$$

Le polynôme $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$, qui est unitaire d'après la question 7, réalise donc l'égalité dans (\diamond).

On pose $Q = \frac{1}{2^{n-1}}T_n - W$ et, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $z_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Q 11. Le polynôme Q est la différence de deux polynômes unitaires de degré n , donc $\deg(Q) \leq n - 1$.

Q 12. On suppose que $\sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$. Alors, pour $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$,

$$Q(z_k) = \frac{T_n(z_k)}{2^{n-1}} - W(z_k) = \frac{\cos(k\pi)}{2^{n-1}} - W(z_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - W(z_k)$$

est non nul et du signe de $(-1)^k$ puisque $|W(z_k)| < \frac{1}{2^{n-1}}$, d'où $Q(z_k)Q(z_{k+1}) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne donc l'existence d'un zéro de Q dans l'intervalle $]z_{k+1}, z_k[$. Ces zéros sont deux à deux distincts par décroissance de la fonction cosinus sur $[0, \pi]$. Cela montre donc que Q admet au moins n racines, ce qui contredit $\deg(Q) \leq n - 1$. On en conclut que l'hypothèse était absurde, ce qui montre que $\sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Q 13. On suppose dans cette question que $\sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$. Le calcul fait à la question précédente montre

que $Q(z_k)$ est encore du signe de $(-1)^k$ (au sens large, cette fois). Par ailleurs, par décroissance stricte de la restriction de la fonction cosinus à $[0, \pi]$, la suite $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$ est (strictement) décroissante, donc le produit $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (z_k - z_j)$ compte k termes négatifs (ceux correspondant à $j \in \llbracket 0, k - 1 \rrbracket$) et $n - k$ termes positifs (ceux correspondant à $j \in \llbracket k + 1, n \rrbracket$). Ainsi, ce produit est lui aussi du signe de $(-1)^k$, donc $Q(z_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (z_k - z_j)^{-1} \geq 0$.

Enfin, la somme de ces termes positifs est nulle d'après la question 5 (avec $n + 1 \leftarrow n$ et $z_k \leftarrow a_k$ pour tout k). Tous ces termes sont donc nuls, donc $Q(z_k) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ (tous les termes $(z_k - z_j)^{-1}$ sont non nuls). Ainsi, Q est un polynôme de degré au plus $n - 1$ qui admet au moins n racines et est donc nul. On peut conclure : $W = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$. L'égalité dans la relation (\diamond) est donc atteinte pour le seul polynôme $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$.

Partie II.A — Interpolation d'une fonction de classe \mathcal{C}^n

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel non nul et $I = [a, b]$ où $a < b$. On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ de la norme infinie. On considère n nombres réels distincts $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ de I . On note L_1, \dots, L_n les polynômes de Lagrange associés à (a_1, a_2, \dots, a_n) et l'on note $W = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$.

Pour toute fonction f définie sur I , le polynôme $\Pi_n(f) = \sum_{i=1}^n f(a_i)L_i$ est, en vertu de la question 4, l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\Pi_n(f)(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On l'appelle *polynôme interpolateur de Lagrange de f associé à (a_1, a_2, \dots, a_n)* .

Q 14. Raisonnons par récurrence simple sur n . Pour $n = 1$, r est de classe \mathcal{C}^1 et s'annule en deux points. Le théorème de Rolle montre que r' s'annule donc une fois.

Supposons le résultat vrai à l'ordre $n - 1$. Si r est de classe \mathcal{C}^n et s'annule en $n + 1$ points distincts, disons $b_0 < b_1 < \dots < b_n$, le théorème de Rolle donne n zéros de r' , qui est de classe \mathcal{C}^{n-1} , un dans chacun des intervalles $]b_i, b_{i+1}[$. Ces n zéros sont donc deux à deux distincts (c'est là qu'intervient de manière fondamentale que le théorème de Rolle donne un zéro de la dérivée dans l'intervalle *ouvert*). On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à r' et il existe c tel que $r'^{(n-1)}(c) = r^{(n)}(c) = 0$.

Q 15. Soit $f \in E$. Soit $\Pi(f)$ le polynôme interpolateur de f associé aux réels (a_1, a_2, \dots, a_n) comme défini ci-dessus. Si $x \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, on a $f(x) - \Pi_n(f)(x) = W(x) = 0$ et n'importe quel $c \in I$ convient.

Supposons que $x \notin \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Posons $r(t) = f(t) - \Pi_n(f)(t) - \kappa W(t)$. Indépendamment du choix de κ , r est de classe \mathcal{C}^n sur I et s'annule en a_i pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Il manque un zéro pour pouvoir appliquer le résultat de la question précédente, que l'on obtient en posant $\kappa = \frac{f(x) - \Pi_n(f)(x)}{W(x)}$ — l'hypothèse sur x assure que $W(x) \neq 0$ —, ce qui donne alors $r(x) = 0$. Comme $r(a_1) = r(a_2) = \dots = r(a_n) = 0$, la question Q 14 assure alors qu'il existe $c \in I$ tel que $r^{(n)}(c) = 0$. Or, $\deg(\Pi_n(f)) \leq n - 1$ et W est unitaire de degré n , d'où

$$r^{(n)} = f^{(n)} - (\Pi_n(f))^{(n)} - \kappa W^{(n)} = f^{(n)} - 0 - \kappa n! = f^{(n)} - \kappa n!,$$

d'où finalement $f^{(n)}(c) = \kappa n!$, soit $f(x) - \Pi_n(f)(x) = W(x)\kappa = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} W(x)$.

Q 16. En passant à la borne supérieure dans la majoration précédente, qui vaut pour tout $x \in I$, il vient

$$\|f - \Pi_n(f)\|_\infty \leq \frac{M_n}{n!} \|W\|_\infty.$$

De plus, $|W(x)| = \prod_{i=1}^n |x - a_i| \leq \prod_{i=1}^n (b - a) = (b - a)^n$, d'où $\|f - \Pi_n(f)\|_\infty \leq \frac{M_n (b - a)^n}{n!}$.

Partie II.B — Suites de polynômes interpolateurs

On considère à nouveau un segment $I = [a, b]$ et une fonction f définie sur I . De plus, pour tout entier naturel non nul n , on suppose donnés des réels distincts $a_{1,n} < \dots < a_{n,n}$ de I . En notant $L_{1,n}, L_{2,n}, \dots, L_{n,n}$ les polynômes de Lagrange associés à $(a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{n,n})$ on a donc le polynôme d'interpolation de Lagrange

$$\Pi_n(f) = \sum_{i=1}^n f(a_{i,n}) L_{i,n} (\spadesuit), \text{ unique polynôme de } \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tel que } \Pi_n(f)(a_{i,n}) = f(a_{i,n}) \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

On s'intéresse dans cette partie à la convergence uniforme sur I vers f de la suite de polynômes $(\Pi_n(f))_n$ pour divers exemples de fonctions \mathcal{C}^∞ .

Partie II.B.1 — Convergence uniforme vers la fonction exponentielle

Dans cette section, $I = [a, b]$, où $a < b$, et f est la restriction à I de la fonction exponentielle. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $\Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur comme défini par (\spadesuit) .

Q 17. L'exponentielle étant sa propre dérivée et l'exponentielle étant croissante, $M_n = \|f\|_{I,\infty} = e^b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La majoration de la question 16 donne alors

$$\|f - \Pi_n(f)\|_\infty \leq \frac{M_n (b - a)^n}{n!} = \frac{e^b (b - a)^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

par croissances comparées ou en invoquant la convergence de $\sum \frac{r^n}{n!}$ pour tout $r \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière exponentielle étant infini. Cela montre que $(\Pi_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur I .

Q 18. Par construction, les polynômes d'interpolation coïncident en plein de points avec la fonction interpolée. Cette question est donc indépendante de ce que développe l'énoncé dans cette partie. La suite de polynômes la plus naturelle convergeant uniformément vers l'exponentielle sur tout segment est donnée par la suite des sommes partielles du DSE de e^x , soit $Q_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$. Il reste à vérifier que $Q_n(x) \neq e^x$ sauf si $x = 0$. Si $x > 0$, c'est évident

car la série est à termes positifs, donc $Q_n(x) < e^x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$. Pour les x négatifs, ce n'est pas si clair et les hypothèses du CSSA ne sont vérifiées qu'à partir d'un certain rang. Toutefois, la formule de Taylor avec reste intégral donne une expression explicite du reste, en l'occurrence

$$e^x - Q_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \neq 0$$

car la fonction intégrée est continue, non nulle sur l'intervalle ouvert d'intégration et de signe constant (négative si $x < 0$ et n impair, positive sinon).

Partie II.B.2 — Convergence uniforme vers une fonction rationnelle

Dans cette section, a est un réel strictement positif et $I = [-a, a]$. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Q 19. La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} comme inverse d'une fonction polynomiale (donc elle-même de classe \mathcal{C}^∞) qui ne s'annule pas sur l'intervalle (qu'elle soit développable en série entière ne montre son caractère \mathcal{C}^∞ que sur l'intervalle $] -1, 1[$). Notons

$$(\mathcal{H}_k): \forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[: f^{(k)}(\tan t) = k! \cos^{k+1}(t) \cos \left((k+1)t + \frac{k\pi}{2} \right)$$

et montrons (\mathcal{H}_k) par récurrence simple sur $k \in \mathbb{N}$. Pour $k = 0$, il vient bien

$$f^{(0)}(\tan t) = \frac{1}{1+\tan^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \cos^2 t = 0! \cos(t) \cos(t+0).$$

On dérive maintenant (\mathcal{H}_k) , que l'on suppose vraie. En utilisant les relations

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2}, \quad \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b) = \sin(a+b) \quad \& \quad \cos(u + \pi/2) = -\sin(u),$$

il vient

$$\begin{aligned} \frac{f^{(k+1)}(\tan t)}{\cos^2 t} &= k! \left[(k+1)(-\sin t) \cos^k(t) \cos \left((k+1)t + \frac{k\pi}{2} \right) + \cos^{k+1}(t)(k+1)(-\sin \left((k+1)t + \frac{k\pi}{2} \right)) \right] \\ &= -(k+1)! \cos^k(t) \left[\sin(t) \cos \left((k+1)t + \frac{k\pi}{2} \right) + \cos(t) \sin \left((k+1)t + \frac{k\pi}{2} \right) \right] \\ &= -(k+1)! \cos^k(t) \sin \left((k+2)t + \frac{k\pi}{2} \right) = (k+1)! \cos^k(t) \cos \left((k+2)t + \frac{(k+1)\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

soit (\mathcal{H}_k) en multipliant par $\cos^2 t$. Notons en passant que, sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, la tangente est bien définie et que le cosinus ne s'y annule pas.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $\Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur de f sur I défini par (\spadesuit). La norme infinie est prise sur l'intervalle $[-a, a]$.

Q 20. On suppose que $a < 1/2$. Pour montrer la convergence uniforme de la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers f sur $[-a, a]$, on utilise, comme à la question 17, la majoration établie à la question 16. La restriction de tangente à l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ étant surjective sur \mathbb{R} , on peut utiliser la question Q 19 pour majorer $\|f^{(n)}\|_\infty$, ce qui, en majorant la partie trigonométrique par 1, donne $\|f^{(n)}\|_\infty \leq n!$. En reportant, il vient bien – c'est la raison de l'hypothèse $a < 1/2$ –

$$\|f - \Pi_n(f)\|_\infty \leq \frac{n!(a - (-a))^n}{n!} = (2a)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Partie II.B.3 — Cas de la somme d'une série entière

Soit $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On pose

$$\forall x \in]-R, R[: f(x) = \sum_{k \geq 0} c_k x^k \quad \text{et} \quad \forall x \in]-1, 1[: g(x) = \sum_{k \geq 0} x^k.$$

Q 21. La fonction g est définie comme la somme d'une série entière de rayon de convergence 1 et est donc de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1, 1[$. Notons

$$(\mathcal{H}_j) : \forall x \in]-1, 1[: g^{(j)}(x) = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}.$$

Pour $j = 0$, il vient $g(x) = \frac{0!}{(1-x)^1} = \frac{1}{1-x}$, ce qui est vrai. Supposons (\mathcal{H}_j) vérifiée. Alors,

$$g^{(j+1)}(x) = \frac{d}{dx}(g^{(j)}(x)) = j!(-j-1)(-1)(1-x)^{-j-1-1} = \frac{(j+1)!}{(1-x)^{j+2}},$$

ce qui établit (\mathcal{H}_{j+1}) . Si on y tient vraiment, on peut passer par les séries entières, mais c'est plutôt plus difficile :

$$\begin{aligned} g^{(j)}(x) &= \sum_{k=j}^{\infty} \frac{k!}{(k-j)!} x^{k-j} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+j)! \frac{x^n}{n!} = j! \sum_{n=0}^{\infty} (n+j)(n+j-1) \cdots (j+1) \frac{x^n}{n!} \\ &= j! \sum_{n=0}^{\infty} (-j-1)(-j-2) \cdots (-j-k) \frac{(-x)^n}{n!} = j!(1-x)^{-j-1}. \end{aligned}$$

Q 22. Soit $r \in]0, R[$. Par définition du rayon de convergence d'une série entière, la suite $(c_n r^n)_n$ est bornée, d'où l'existence d'une constante C_r telle que $|c_k| r^k \leq C_r$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $|c_k| \leq C_r r^{-k}$.

Q 23. Soit $x \in]-r, r[$. On peut dériver une série entière terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence et l'on calcule donc $f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} c_k x^{k-n}$. Alors, par l'inégalité triangulaire et la même opération sur la série géométrique,

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(x)| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} |c_k| |x|^{k-n} \stackrel{(Q 22)}{\leq} C_r \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \frac{|x|^{k-n}}{r^k} = \frac{C_r}{r^n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \left(\frac{|x|}{r}\right)^{k-n} \\ &= \frac{C_r}{r^n} g^{(n)}\left(\frac{|x|}{r}\right) \stackrel{(Q 21)}{=} \frac{C_r n!}{r^n \left(1 - \frac{|x|}{r}\right)^{n+1}} = \frac{n! r C_r}{(r - |x|)^{n+1}}, \end{aligned}$$

le choix de prendre $x \in]-r, r[$ permettant la convergence de la série majorante, $\frac{|x|}{r}$ appartenant au domaine de définition de g .

Q 24. On considère toujours la norme infinie sur le segment $[-a, a]$. Alors,

$$\forall r \in]a, R[: \|f - \Pi_n(f)\|_{[-a, a], \infty} \stackrel{(Q 16)}{\leq} \frac{(2a)^n}{n!} \sup_{x \in [-a, a]} \frac{n! r C_r}{(r - |x|)^{n+1}} = \frac{r C_r}{2a} \left(\frac{2a}{r-a}\right)^{n+1}.$$

On suppose *in fine* que $a < R/3$. On peut alors prendre $3a < r < R$, ce qui assure que $\frac{2a}{r-a} < 1$ et, corrélativement, que la suite de polynômes $(\Pi_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

Partie II.B.4 — Interpolation aux points de Tchebychev

Cette section reprend l'étude des deux sections précédentes dans le cas de points d'interpolation particuliers, liés aux racines des polynômes de Tchebychev. On considère $a > 0$ et $I = [-a, a]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les points de Tchebychev d'ordre n dans I sont :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket : a_{k,n}^* = a \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = a y_{k,n}.$$

On pose $W_n^*(X) = \prod_{k=1}^n (X - a_{k,n}^*)$. Si f est une fonction définie sur I et si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit comme en (♠) le polynôme interpolateur $\Pi_n^*(f)$ de f aux points de Tchebychev d'ordre n . C'est donc l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\Pi_n^*(a_{k,n}^*) = f(a_{k,n}^*)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Q 25. Exprimons W_n^* en fonction de T_n en utilisant la question 9 :

$$W_n^*(x) = \prod_{k=1}^n (x - a_{k,n}^*) = \prod_{k=1}^n (x - ay_{k,n}) = a^n \prod_{k=1}^n \left(\frac{x}{a} - y_{k,n} \right) = 2 \left(\frac{a}{2} \right)^n T_n \left(\frac{x}{a} \right)$$

Pour $x \in [-a, a]$, on en déduit

$$|W_n^*(x)| \leq 2 \left(\frac{a}{2} \right)^n \sup_{|x| \leq 1} |T_n(x)| \stackrel{(Q10)}{=} 2 \left(\frac{a}{2} \right)^n.$$

Q 26. On reprend dans cette question la fonction f étudiée dans la section II.B.2, soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. La majoration générale de la question 16 et le calcul de $M_n = n!$ effectué à la question 20 donnent la majoration

$$\|f - \Pi_n(f)\|_\infty \leq \|W_n^*\|_{[-a,a],\infty} \stackrel{(Q25)}{\leq} 2 \left(\frac{a}{2} \right)^n$$

d'où la convergence uniforme de $(\Pi_n^*(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers f sur $[-a, a]$ pourvu que $a/2 < 1$, soit $a < 2$. Notons que, sur cet exemple, passer d'un polynôme interpolateur quelconque à un polynôme d'interpolation dont les points sont les racines du polynôme de Tchebychev normalisées permet de passer d'une convergence uniforme sur $[-a, a]$ pour tout $a < 1/2$ à tout $a < 2$.

Q 27. La substitution de $2a$ par la majoration de $\|W_n^*\|_{[-a,a],\infty}$ dans le calcul de la question 24 donne

$$\forall r \in]a, R[, R[: \|f - \Pi_n(f)\|_\infty \leq \frac{2}{n!} \left(\frac{a}{2} \right)^n \sup_{x \in [-a,a]} \frac{n! r C_r}{(r - |x|)^{n+1}} = \frac{4r C_r}{a} \left(\frac{a}{2(r-a)} \right)^{n+1}$$

Il faut que $\frac{a}{2(r-a)} < 1$, soit $a < \frac{2r}{3}$. On reprenant le raisonnement de la question 24, pour $a < \frac{2R}{3}$, on choisit r tel que $\frac{3a}{2} < r < R$ et l'on obtient la majoration ci-dessus, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, d'où la convergence uniforme de $(\Pi_n^*(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers f sur $[-a, a]$. Là aussi, on observe que ce choix judicieux des points d'interpolation augmente le domaine de convergence uniforme : on est passé de $[-a, a]$ pour tout $a < R/3$ à $[-a, a]$ pour tout $a < 2R/3$.

Partie III — Phénomène de Runge

Partie III.A — Étude d'une intégrale généralisée

Pour tout réel $\alpha > 0$, on considère la fonction $h_\alpha : t \mapsto \ln \left(\frac{1-t^2}{\alpha^2+t^2} \right)$.

Q 28. Sur l'intervalle $[0, 1[$, la fonction $t \mapsto 1-t^2$ est décroissante et strictement positive, de même que $t \mapsto (\alpha^2+t^2)^{-1}$. Donc leur produit est décroissant et strictement positif et, par croissance du logarithme, h_α est donc bien définie et décroissante. On pouvait aussi calculer

$$h'_\alpha(t) = -\frac{2(1+\alpha^2)t}{(1-t^2)(\alpha^2+t^2)} < 0 \quad \text{ou simplement} \quad \left(\frac{1-t^2}{\alpha^2+t^2} \right)' = -\frac{2(\alpha^2+1)t}{(\alpha^2+t^2)^2} < 0,$$

et utiliser le caractère croissant du logarithme. Par ailleurs,

$$h_\alpha(t) = \ln(1-t) + \ln(1+t) - \ln(\alpha^2+t^2) \underset{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}}{=} \ln(1-t) + \mathcal{O}(1),$$

d'où l'intégrabilité de h_α sur $[0, 1[$ par comparaison avec $\int_0^1 \ln(1-t) dt \stackrel{(u=1-t)}{=} \int_0^1 \ln(u) du$.

Q 29. En découpant l'intégrale par linéarité, puis en effectuant les changements de variable affine $u = 1 - t$ (resp. $u = 1 + t$) sur les deux premières et une intégration par parties sur la troisième, il vient

$$\begin{aligned} J_\alpha &= \int_0^1 \ln(1-t) dt + \int_0^1 \ln(1+t) dt - \int_0^1 \ln(\alpha^2 + t^2) dt = \int_1^0 \ln(u)(-du) + \int_1^2 \ln(u) du - \int_0^1 1 \times \ln(\alpha^2 + t^2) dt \\ &= \int_0^2 \ln(u) du - [t \ln(\alpha^2 + t^2)]_0^1 + \int_0^1 \frac{2t^2}{\alpha^2 + t^2} dt = [u \ln(u) - u]_{u=0}^2 - \ln(1 + \alpha^2) + \int_0^1 \frac{2t^2 + 2\alpha^2 - 2\alpha^2}{\alpha^2 + t^2} dt \\ &= (2 \ln(2) - 2) - \ln(1 + \alpha^2) + 2 - 2\alpha^2 \left[\frac{1}{\alpha} \arctan \left(\frac{t}{\alpha} \right) \right]_{t=0}^1 = 2 \ln(2) - \ln(1 + \alpha^2) - 2\alpha \arctan \left(\frac{1}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Q 30. On calcule facilement $\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha > 0}} J_\alpha = 2 \ln 2 > 0$, ce qui montre, par définition de la limite, qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $J_\alpha > 0$ pour tout $\alpha \in]0, \gamma[$.

Notons qu'il était possible de répondre à cette question sans calculer J_α en remarquant qu'elle est définie aussi pour $\alpha = 0$ et que $J_0 = \int_0^1 \ln \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) dt$ est (sous réserve de convergence) strictement positive comme intégrale d'une fonction strictement positive sur $]0, 1[$. Par ailleurs,

$$|h_\alpha(t)| \leq |\ln(1-t^2)| + |\ln(\alpha^2 + t^2)|.$$

La fonction $t \ln(1-t^2)$ est intégrable sur $]0, 1[$ et pour, disons, $0 \leq \alpha \leq 1$, on a

$$\forall t \in]0, 1[: 2 \ln(t) = \ln(t^2) \leq \ln(\alpha^2 + t^2) \leq \ln(2) \quad \therefore \quad |h_\alpha(t)| \leq |\ln(1-t^2)| + 2|\ln(t)| + \ln(2),$$

domination intégrable. Le théorème de continuité des intégrales à paramètre assure alors que $\alpha \mapsto J_\alpha$ est bien définie et continue sur $[0, 1]$, d'où $\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha > 0}} J_\alpha = J_0 > 0$ et le résultat.

Partie III.B — Application à une somme de Riemann

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère dans $]0, 1[$ les points $a_{k,n}$ donnés, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, par $a_{k,n} = \frac{2k+1}{2n}$ et l'on pose

$$S_n(h_\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h_\alpha(a_{k,n}) = \frac{1}{n} \left[h_\alpha \left(\frac{1}{2n} \right) + h_\alpha \left(\frac{3}{2n} \right) + \cdots + h_\alpha \left(\frac{2n-1}{2n} \right) \right].$$

Q 31. La fonction h_α étant décroissante sur $[0, 1[$ en vertu de la question 28, on peut lui appliquer le principe de comparaison série-intégrale. Comme $a_{k+1,n} - a_{k,n} = \frac{1}{n}$, il vient

$$\begin{aligned} \int_{a_{k,n}}^{a_{k+1,n}} h_\alpha(t) dt &\stackrel{(0 \leq k \leq n-2)}{\leq} \frac{1}{n} h_\alpha(a_{k,n}) \stackrel{(1 \leq k \leq n-1)}{\leq} \int_{a_{k-1,n}}^{a_{k,n}} h_\alpha(t) dt \quad \therefore \\ S_n(h_\alpha) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h_\alpha(a_{k,n}) \leq \frac{1}{n} h_\alpha(a_{0,n}) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_{k-1,n}}^{a_{k,n}} h_\alpha(t) dt = \frac{1}{n} h_\alpha \left(\frac{1}{2n} \right) + \int_{1/2n}^{1-1/2n} h_\alpha(t) dt \end{aligned}$$

par sommation en utilisant la relation de Chasles. En isolant symétriquement le dernier terme de la somme, on obtient de même la minoration

$$\int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t) dt + \frac{1}{n} h_\alpha \left(\frac{2n-1}{2n} \right) \leq S_n(h_\alpha).$$

On conclut avec le théorème des gendarmes après avoir montré que le majorant et le minorant convergent, et ce vers la même limite : d'après l'intégrabilité de h_α , établie à la question 28, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t) dt = \int_0^1 h_\alpha(t) dt$.

La fonction h_α étant continue en 0, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h_\alpha \left(\frac{1}{2n} \right) = 0$. Enfin, l'équivalent établi à la question 28 donne

$\frac{1}{n} h_\alpha \left(\frac{2n-1}{2n} \right) \sim \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{2n} \right) \sim -\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On peut conclure : la suite $(S_n(h_\alpha))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers J_α . Notons en passant que le raisonnement s'étend aux intégrales absolument convergentes de fonctions monotones sur un intervalle borné, étendant partiellement le cas classique de la limite des sommes de Riemann des fonctions continues

par morceaux sur un segment.

Q 32. Il est clair que tous les termes du produit sont positifs. D'après le calcul de limite effectué à la question précédente,

$$\ln \left[\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2} \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(\frac{1 - a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} h_\alpha(a_{k,n}) \sim n \int_0^1 h_\alpha(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

car l'hypothèse $0 < \alpha < \gamma$ assure, d'après la question 30, que $J_\alpha \neq 0$. En composant par l'exponentielle, il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2} = +\infty.$$

Partie III.C — Le phénomène de Runge

Dans cette sous-partie, $I = [-1, 1]$ et $\alpha > 0$. On considère la fonction f_α définie sur $[-1, 1]$ par $f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^2 + x^2}$.

On reprend les points $a_{k,n}$ définis dans la sous-partie III.B, à savoir $a_{k,n} = \frac{2k+1}{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $R_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ le polynôme interpolateur de f_α aux $2n$ réels de $I \setminus \{\pm a_{k,n}; k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$. Autrement dit, R_n est l'unique polynôme de degré au plus $2n-1$ qui coïncide avec f_α aux points

$$-\frac{2n-1}{2n}, -\frac{2n-3}{2n}, \dots, -\frac{3}{2n}, -\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, \dots, \frac{2n-3}{2n}, \frac{2n-1}{2n}.$$

On pose enfin $Q_n(X) = 1 - (X^2 + \alpha^2)R_n(X)$.

Q 33. Posons $\Delta_n(X) = R_n(X) - R_n(-X)$. Par construction, $\deg(\Delta_n) \leq \deg(R_n) \leq 2n-1$ et Δ_n s'annule aux points $\pm a_{k,n}$, donc admet au moins $2n$ racines. Ainsi, $\Delta_n = 0$, donc R_n est un polynôme pair. Corrélativement (cela sera utile dans la question suivante), $R_n \in \mathbb{R}_{2n-2}[X]$.

Par ailleurs, on calcule immédiatement $Q_n(i\alpha) = 1$.

Q 34. On calcule

$$Q_n(\pm a_{k,n}) = 1 - (a_{k,n}^2 + \alpha^2)f_\alpha(\pm a_{k,n}) = 1 - 1 = 0.$$

Ainsi, Q_n admet $2n$ racines et est de degré au plus $2n$ puisque l'on a vu que $R_n \in \mathbb{R}_{2n-2}[X]$. Enfin, le calcul

$Q_n(i\alpha) = 1 \neq 0$ montre que Q_n n'est pas le polynôme nul. Donc $Q_n = \lambda_n \prod_{k=0}^{n-1} (x^2 - a_{k,n}^2)$, où λ_n est le coefficient dominant de Q_n .

Q 35. En prenant $x = i\alpha$ dans l'expression de Q_n , il vient $1 = Q_n(i\alpha) = \lambda_n (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha^2 + a_{k,n}^2)$. Pour $x \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\alpha\}$,

on peut diviser Q_n par $x^2 + \alpha^2$. Il vient

$$\frac{Q_n(x)}{x^2 + \alpha^2} = f_\alpha(x) - R_n(x) = \frac{\lambda_n}{x^2 + \alpha^2} \prod_{k=0}^{n-1} (x^2 - a_{k,n}^2) = \frac{(-1)^n}{x^2 + \alpha^2} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{x^2 - a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2}.$$

Q 36. On suppose que $\alpha < \gamma$. En prenant $x = 1$ dans l'égalité précédente, il vient

$$|f_\alpha(1) - R_n(1)| = \frac{1}{1 + \alpha^2} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (\text{Q 32}).$$

Q 37. Le théorème d'approximation de Weierstraß stipule que, sur un segment, toute fonction continue est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. Mais l'énoncé ne dit pas comment construire une telle suite de polynômes. On en a vu deux démonstrations, l'une utilisant des convolutions (DMS 4), l'autre, les polynômes de Bernstein (exercice 39 de la feuille de probabilités). Le problème que l'on vient de traiter s'attaque à deux idées aussi naturelles que fausses :

- la première idée qui vient pour démontrer le théorème de Weierstrass, c'est de prendre des suites de polynômes interpolateurs ;
- si l'on prend une telle suite, le plus naturel consiste à prendre comme points d'interpolation une subdivision de l'intervalle à pas constant.

Le phénomène de Runge (partie III) montre que ça ne marche pas du tout, puisqu'il peut ne pas même y avoir convergence simple. Il y a certes convergence uniforme dans les bons cas (partie II), mais pas toujours. Par ailleurs, la partie II et la partie I.C montrent que le choix d'une subdivision à pas constant n'est pas le meilleur, les racines des polynômes de Tchebychev donnant un résultat nettement supérieur (sans pour autant supprimer le phénomène de Runge, mais ce dernier point n'était pas abordé).