

Sujet 1 — CCINP, PSI, 2019

Pb. 1 — Fonctions de classe \mathcal{C}^∞ et développement en série entière

Partie I — Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

On considère la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)} dt$.

Q 1. La fonction $t \mapsto e^{-t(1-itx)}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $|e^{-t(1-itx)}| = e^{-t}$. La convergence de l'intégrale de référence $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ assure la convergence absolue, donc la convergence, de $\int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)} dt$.

Q 2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est une intégrale de référence convergente. Supposons que Γ_p converge. On procède à une intégration par parties : $u(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = t^{p+1}$ étant de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ ,

$$\Gamma_{p+1} = \int_0^{+\infty} \underbrace{t^{p+1}}_v \times \underbrace{e^{-t}}_{u'} dt = [t^{p+1}(-e^{-t})]_0^{t \rightarrow +\infty} - \int_0^{+\infty} (p+1)t^p(-e^{-t}) dt = 0 + (p+1)\Gamma(p).$$

La validité de l'intégration par parties est assurée par la convergence du crochet en $+\infty$ et l'on obtient à la fois la convergence de l'intégrale de gauche et la relation de récurrence numérique $\Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p$ (pour ceux qui connaîtraient par cœur la fonction Γ d'Euler, l'intégrale notée Γ_p dans l'énoncé est en fait $\Gamma(p+1)$).

On a $\Gamma_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, d'où, par une récurrence immédiate, $\Gamma_p = p!$.

Q 3. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre dans sa version \mathcal{C}^∞ (on pourrait aussi procéder par récurrence et montrer que f est de classe \mathcal{C}^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.)

- (i) Pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto e^{-t(1-itx)} = e^{-t}e^{it^2x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ et l'on a, par une récurrence immédiate, $\frac{\partial^p}{\partial x^p}(e^{-t(1-itx)}) = i^p t^{2p} e^{-t(1-itx)}$ pour tout entier naturel p ;
- (ii) pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto i^p t^{2p} e^{-t(1-itx)}$ est \mathcal{C}^∞ , donc \mathcal{C}^0 p.m. sur \mathbb{R}_+ ;
- (iii) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $|i^p t^{2p} e^{-t(1-itx)}| = t^{2p} e^{-t}$, fonction de domination intégrable sur \mathbb{R}_+ par Q2.

On en déduit que f est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}: f^{(p)}(x) = i^p \int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t(1-itx)} dt.$$

Q 4. L'expression de $f^{(p)}$ donne $f^{(p)}(0) = i^p \Gamma_{2p} = i^p (2p)!$. Soit $r > 0$. On calcule

$$\left| \frac{f^{(p+1)}(0)r^{p+1}}{(p+1)!} \div \frac{f^{(p)}(0)r^p}{p!} \right| = \frac{(2p+2)! p! r^{p+1}}{(2p)!(p+1)! r^p} = 2(2p+1)r \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty.$$

La règle de d'Alembert montre que la série est divergente pour tout $r > 0$, donc que la série entière est de rayon de convergence nul. La fonction f n'est donc pas développable en série entière au voisinage de 0.

Q 5. On considère la fonction g définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}$. On applique le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions dans sa version \mathcal{C}^∞ .

i) Posons g_k , la fonction définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $g_k(x) = e^{-k(1-ikx)}$. Alors, g_k est de classe \mathcal{C}^∞ et l'on a, pour $p \in \mathbb{N}$, $g_k^{(p)}(x) = i^p k^{2p} e^{-k(1-ikx)}$ (le calcul a déjà été fait à la question Q3).

ii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|g_k^{(p)}(x)| = k^{2p} e^{-k}$, donc $\|g_k^{(p)}\|_\infty = k^{2p} e^{-k}$. Or, quand k tend vers l'infini, $k^{2p} e^{-k} = (k^{2p} e^{-k/2}) e^{-k/2} = o(e^{-k/2})$ d'où la convergence de la série numérique $\sum_k k^{2p} e^{-k}$,

qui traduit la convergence normale, donc uniforme, de $\sum_k g_k^{(p)}$ sur \mathbb{R} . On peut aussi utiliser la règle de

d'Alembert car $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^{2p} e^{-k-1}}{k^{2p} e^{-k}} = \frac{1}{e} < 1$.

La fonction g est donc de classe \mathcal{C}^∞ et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme, d'où l'expression

$$g^{(p)}(x) = i^p \sum_{k=0}^{\infty} k^{2p} e^{-k(1-ikx)}.$$

Q 6. En particulier, on calcule $\left|g^{(p)}(0)\right| = \sum_{k=0}^{\infty} k^{2p} e^{-k} \geq p^{2p} e^{-p}$ (on garde le seul terme d'indice p , la positivité des autres donnant la minoration).

Q 7. Soit $r > 0$. Comme on ne dispose que d'une minoration de $\left|g^{(p)}(0)\right|$, on ne peut plus utiliser brutalement la règle de d'Alembert comme à la question Q 4. L'expression obtenue à la question précédente donne

$$\left|\frac{g^{(p)}(0)}{p!}\right|_{r^p} \geq \frac{p^{2p}}{p!} e^{-p} r^p = \frac{p^p}{p!} \times p^p e^{-p} r^p \geq p^p e^{-p} r^p = (pre^{-1})^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} +\infty$$

car pre^{-1} tend déjà vers l'infini. Il s'ensuit que la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$ a un rayon de convergence nul. La fonction g n'est donc pas développable en série entière au voisinage de 0.

En fait, on peut quand même utiliser la règle de d'Alembert car si R est le rayon de convergence de $\sum_{p \geq 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$ et R' celui de $\sum_{p \geq 0} \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!} x^p$, alors la question Q 6 donne $R \leq R'$. Or, pour tout $r > 0$,

$$\frac{(p+1)^{2p+2} e^{-p-1} r^{p+1}}{(p+1)!} \div \frac{p^{2p} e^{-p} r^p}{p!} = (p+1) \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{2p} e^{-1} r \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} e r p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} +\infty,$$

ce qui montre la divergence de la série pour tout $r > 0$, donc $R' = 0$, d'où $R = 0$.

Partie II — Le théorème de Borel

Q 8. On effectue une décomposition en éléments simples. On trouve a et b , ou bien en multipliant la fraction rationnelle $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(x-i)(x+i)}$ par $1 \pm i$ et en prenant la valeur $x = \pm i$, ou bien en réduisant au même dénominateur et en résolvant le système linéaire d'inconnue (a, b) obtenu. Il vient $a = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$ et $b = -a$, soit (les deux expressions sont acceptables)

$$\forall x \in \mathbb{R}: \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right) = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right).$$

Q 9. L'énoncé attend manifestement une rédaction détaillée de cette récurrence à peu près immédiate. On considère la fonction Ψ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\Psi(x) = \frac{1}{x-i}$. Soit à montrer par récurrence simple que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}: \Psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}.$$

Pour $p = 0$, $\Psi^{(0)}(x) = \Psi(x) = \frac{1}{x-i} = \frac{(-1)^0 0!}{(x-i)^1}$. La formule est donc vraie pour $p = 0$. Supposons-là vraie pour un certain entier $p-1$. Alors,

$$\Psi^{(p)}(x) = \frac{d}{dx} [\Psi^{(p-1)}(x)] = \frac{d}{dx} \left[\frac{(-1)^{p-1} (p-1)!}{(x-i)^p} \right] = \frac{(-1)^{p-1} (p-1)! (-p)}{(x-i)^{p+1}} = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}},$$

d'où la formule pour l'entier p .

Q10. Soit la fonction φ_1 définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $\varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Pour dériver φ_1 , il ne faut surtout pas se lancer dans des dérivations de plus en plus pénibles de quotients cauchemardesques, mais utiliser la décomposition de la question Q8. Il vient, en utilisant le calcul mené à la question Q9 et son conjugué,

$$\varphi_1^{(p)}(x) = \frac{1}{2i} \frac{d^p}{dx^p} \left[\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right] = \frac{(-1)^p p!}{2i} \left(\frac{1}{(x-i)^{p+1}} - \frac{1}{(x+i)^{p+1}} \right) = \frac{(-1)^p p!}{2i} \left(\frac{1}{(x-i)^{p+1}} - \frac{1}{(x+i)^{p+1}} \right).$$

Q11. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité triangulaire et les propriétés du module donnent

$$\begin{aligned} \left| (x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1} \right| &\leq |x+i|^{p+1} + |x-i|^{p+1} = 2(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}} \quad \therefore \\ \left| \varphi_1^{(p)}(x) \right| &= \frac{p!}{2} \times \frac{\left| (x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1} \right|}{(x^2+1)^{p+1}} \leq \frac{p! \times 2(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}}{2(x^2+1)^p} = \frac{p!}{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}} \leq \frac{p!}{(x^2)^{\frac{p+1}{2}}} = \frac{p!}{|x|^{p+1}}. \end{aligned}$$

Q12. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, notons φ_α la fonction définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}$. Ainsi, $\varphi_\alpha(x) = \varphi_1(\alpha x)$, d'où $\varphi_\alpha^{(p)}(x) = \alpha^p \varphi_1^{(p)}(\alpha x)$, et, en reprenant la majoration de la question Q11,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^* : \left| \alpha \varphi_\alpha^{(p)}(x) \right| \leq \alpha \frac{\alpha^p p!}{(\alpha|x|)^{p+1}} = \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

On considère une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ par $u_n(x) = \frac{a_n x^n}{1+n! a_n^2 x^2}$.

Q13. Pour $\alpha_n = a_n \sqrt{n!}$, on définit $u_n(x) = \frac{a_n x^n}{1+n! a_n^2 x^2} = a_n x^n \varphi_{\alpha_n}(x)$. Pour des entiers $n \geq p \geq k \geq 0$, on a $\frac{d^k x^n}{dx^k} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ et la formule de Leibniz donne

$$\forall x \in \mathbb{R} : u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{d^k x^n}{dx^k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) = a_n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x).$$

Q14. Si $p < n$, tous les termes x^{n-k} donnent 0 pour $x = 0$, d'où $u_n^{(p)}(0) = 0$. Pour $p = n$, le seul terme non nul correspond à $k = p = n$ et donne $u_n^{(n)}(0) = a_n n! \varphi_{\alpha_n}(0) = n! a_n$.

Q15. Pour $p \leq n$, l'inégalité triangulaire et la majoration obtenue à la question Q12 donnent

$$\begin{aligned} \left| u_n^{(p)}(x) \right| &\leq |a_n| \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} |x|^{n-k} \left| \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \right| \stackrel{(Q12)}{\leq} |a_n| \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} |x|^{n-k} \frac{(p-k)!}{|\alpha_n| |x|^{p-k+1}} = \\ &= \frac{|a_n|}{|\alpha_n|} \sum_{k=0}^p \frac{p! n! (p-k)!}{k! (p-k)! (n-k)!} |x|^{n-k-(p-k+1)} = \frac{p!}{\sqrt{n!}} |x|^{n-p-1} \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} = 2^n p! \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}. \end{aligned}$$

Q16. Les fonctions u_n étant de classe \mathcal{C}^∞ , il suffit de montrer, pour appliquer le théorème de dérivation terme à terme, que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n u_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment. Comme les premiers

termes sont indifférents, il suffit de montrer la convergence uniforme de $\sum_{n=p}^{\infty} u_n^{(p)}$. Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [-a, a]$, la majoration de la question Q15 donne, à p fixé,

$$\left| u_n^{(p)}(x) \right| \leq 2^n p! \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} \leq 2^n p! \frac{a^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} = v_n$$

On calcule $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2a}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, d'où la convergence de la série $\sum v_n$ en vertu de la règle de d'Alembert. Ainsi, les séries $\sum_n u_n^{(p)}$ convergent normalement, donc uniformément sur tout segment et le théorème s'applique, montrant que $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est bien définie, de classe \mathcal{C}^∞ et que ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation

terme à terme.

Q 17. En particulier, $U(0) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(0) = u_0(0) = a_0$ (les autres termes étant nuls) et, pour tout entier $p \geq 1$, la dérivation terme à terme de la question Q 16 et le calcul fait à la question Q 14 donnent

$$U^{(p)}(0) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m^{(p)}(0) = \sum_{m=0}^{p-1} u_m^{(p)}(0) + p! a_p.$$

Q 18. Soit une suite réelle $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$. On construit récursivement une suite réelle $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$, définissant la suite de fonctions $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que, pour $U = \sum_{p=0}^{\infty} u_p$, on ait $U^{(p)}(0) = b_p$. D'après la question Q 17, la valeur de $U^{(p)}(0)$ est entièrement déterminée par $(a_m)_{0 \leq m \leq p}$. En particulier, pour $p = 0$, la relation donne $U(0) = a_0$. On choisit donc $a_0 = b_0$. Supposons $(a_m)_{0 \leq m \leq p-1}$ déterminée de façon à ce que $U^{(k)}(0) = b_k$ pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. Le choix

$$a_p = \frac{1}{p!} \left(b_p - \sum_{m=0}^{p-1} u_m^{(p)}(0) \right)$$

est le seul satisfaisant à la condition de la question Q 17. Cela termine la démonstration du théorème de Borel-Peano.

Pb. 2 — Matrices et systèmes différentiels tridiagonaux

Partie I — Éléments propres d'une matrice

I.1 – Localisation des valeurs propres.

On considère une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soient une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A et un vecteur propre associé $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\}$.

Q 19. La formule du produit matrice-vecteur donne

$$\lambda X = AX \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket : \lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j.$$

Q 20. Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_j|$. Le vecteur x étant supposé non nul, on a $x_{i_0} \neq 0$. Alors, l'inégalité triangulaire appliquée à l'égalité de la question Q 19 donne

$$\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j \quad \therefore \quad |\lambda x_{i_0}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| |x_{i_0}| \quad \begin{matrix} (x_{i_0} \neq 0) \\ \therefore \end{matrix} \quad |\lambda| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right\}.$$

Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_n(\alpha, \beta) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_n(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Q 21. La matrice $A_n(\alpha, \beta)$ est symétrique réelle, donc ses valeurs propres le sont aussi. C'est une partie du théorème spectral.

Q 22. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $A_n(\alpha, \beta)$. La question Q 20 donne

$$|\lambda| \leq \max(|\alpha| + |\beta|, |\beta| + |\alpha| + |\beta|) = |\alpha| + 2|\beta|.$$

I.2 – Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$.

Q 23. Pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, la question Q 22 donne $|\lambda| \leq 2$, soit $\lambda \in [-2, 2]$. Comme la fonction $2 \cos$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-2, 2]$, il existe donc un unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = 2 \cos(\theta)$.

On note U_n le polynôme $\chi_{A_n(0,1)}(2X)$.

Q 24. Soit $n \geq 3$. On développe (par exemple) le déterminant $\chi_{A_n(0,1)}(x)$ par rapport à la première ligne. Il vient

$$\chi_{A_n(0,1)}(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & x & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x\chi_{A_{n-1}(0,1)}(x) + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & x & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x\chi_{A_{n-1}(0,1)}(x) - \chi_{A_{n-1}(0,1)}(x).$$

On en déduit, pour $n \geq 3$, la relation $U_n = 2XU_{n-1} - U_{n-2}$.

Q 25. Montrons l'expression par récurrence double sur n . Pour $n = 1$, on calcule $\chi_{A_1(0,1)}(x) = x$, $U_1 = 2X$ et, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la formule $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$ donne $\sin \theta U_1(\cos \theta) = \sin(2\theta)$, d'où $U_1(\cos \theta) = \frac{\sin(2\theta)}{\sin \theta}$ pour tout $\theta \in]0, \pi[$, la fonction sinus ne s'annulant pas sur l'intervalle. Pour $n = 2$, on calcule

$$\chi_{A_2(0,1)}(x) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = X^2 - 1, \quad U_2 = 4X^2 - 1 \quad \therefore$$

$$\sin \theta U_2(\cos \theta) = \sin x [(2 \cos \theta)^2 - 1] = 2 \cos(2\theta) \sin \theta + \sin \theta = [(\sin(3\theta) + \sin(-\theta))] + \sin \theta = \sin(3\theta).$$

En admettant la formule aux ordres $n - 1$ et $n - 2$, il vient

$$\begin{aligned} \sin \theta U_n(\cos \theta) &= \sin \theta [2 \cos \theta \sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta)] \\ &= \sin \theta [\sin((n+1)\theta) + \sin((n-1)\theta) - \sin((n-1)\theta)] = \sin \theta \sin((n+1)\theta), \end{aligned}$$

d'où le résultat en divisant à nouveau par $\sin \theta \neq 0$.

Q 26. D'après la question Q 23, les valeurs propres de $A_n(0, 1)$ s'écrivent $\lambda = 2 \cos \theta$ avec $\theta \in [0, \pi]$. Restreignons-nous dans un premier temps à $\theta \in]0, \pi[$. Alors,

$$\lambda = 2 \cos \theta \in \text{Sp}(A_n(0, 1)) \iff \chi_{A_n(0,1)}(2 \cos \theta) = 0 \iff U_n(\cos \theta) \stackrel{(Q25)}{=} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} = 0 \iff \sin((n+1)\theta) = 0.$$

Or, $0 < (n+1)\theta < (n+1)\pi$ et $\begin{cases} \sin((n+1)\theta) = 0 \\ 0 < \theta < \pi \end{cases} \iff \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket : (n+1)\theta = k\pi$. Comme la restriction de la fonction sinus à $]0, \pi[$ est injective (elle est strictement décroissante), on obtient ainsi n valeurs propres distinctes, ce qui est le maximum possible, vu que $A_n(0, 1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a donc toutes les valeurs propres, soit

$$\text{Sp}(A(0, 1)) = \left\{ 2 \cos \left(\frac{j\pi}{n+1} \right); j \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\};$$

toutes les valeurs propres sont simples et les espaces propres sont des droites vectorielles (sinon, ils ne pourraient être en somme directe).

Considérons maintenant $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et posons $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1}$.

Q 27. Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2 \cos(\theta_j)$, la question Q 19 se traduit par le système linéaire

$$\begin{cases} -2 \cos(\theta_j)x_1 + x_2 = 0, \\ x_{k-1} - 2 \cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} = 0 & \forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \\ x_{n-1} - 2 \cos(\theta_j)x_n = 0. \end{cases}$$

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_{k-1} - 2 \cos(\theta_j)u_k + u_{k+1} = 0.$$

Q 28. On vérifie facilement que E contient la suite nulle et est stable par combinaison linéaire (il faut l'écrire ici). L'application $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(u) = (u_0, u_1)$ réalise un isomorphisme entre les deux espaces (les éléments de E sont des suites linéaires récurrentes d'ordre 2 et sont donc univoquement déterminées par leurs deux premiers termes), donc $\dim E = 2$.

Q 29. Pour déterminer l'ensemble des suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E$, on note que le polynôme caractéristique de la récurrence est $P = X^2 - 2 \cos \theta_j X + 1 = (X - e^{i\theta_j})(X - e^{-i\theta_j})$. Il s'ensuit que $E = \text{Vect} \left((\cos(k\theta_j))_k, (\sin k\theta_j)_k \right)$. Pour $u_k = a \cos(k\theta_j) + b \sin(k\theta_j)$, il vient $0 = u_0 = a$ et $0 = u_{n+1}$ ne donne pas de condition. L'ensemble des suites $(u_k)_{k \geq 0}$ de E telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$ sont donc les suites de la forme $u_k = b \sin(k\theta_j)$.

Q 30. En complétant le système de la question Q 27 avec $x_0 = x_{n+1} = 0$, on obtient que $E_{2 \cos \theta_j}(A_n(0,1))$ est précisément décrit ci-dessus, soit

$$E_{2 \cos \theta_j}(A_n(0,1)) = \text{Vect} \left(\sin \left(\frac{j\pi}{n+1} \right) \quad \sin \left(\frac{2j\pi}{n+1} \right) \quad \dots \quad \sin \left(\frac{(n-1)j\pi}{n+1} \right) \right)^\top.$$

Q 31. On a $A(\alpha, \beta) = \alpha I_n + \beta A(0,1)$, d'où

$$A(0,1)x = \lambda x \iff A(\alpha, \beta)x = (\alpha + \beta\lambda)x.$$

Corrélativement, les valeurs propres de $A(\alpha, \beta)$ sont les $\alpha + 2\beta \cos \theta_j$ avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et les vecteurs propres sont les mêmes que ceux de $A(0,1)$... ce qui ne signifie pas que les espaces propres, eux, sont les mêmes.

De fait, si $\beta \neq 0$, alors $A(\alpha, \beta)$ possède n valeurs propres distinctes et $E_{\alpha+2\beta \cos \theta_j}(A(\alpha, \beta)) = E_{2 \cos \theta_j}(A(0,1))$. Si $\beta = 0$, $A = \alpha I_n$ admet α comme unique valeur propre et l'on a $E_\alpha(A(\alpha, 0)) = \mathbb{R}^n$.

Partie II — Système différentiel

II.1 – Matrices par blocs

On considère A, B, C et D des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que C et D commutent.

Q 32. Les quatre matrices étant carrées et de même taille, les règles du produit par blocs s'appliquent et donnent

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ CD - DC & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}.$$

Q 33. On note dans cette question et les deux suivantes $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. La multiplicativité du déterminant et le fait que le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs soit égal au produit de ses déterminants diagonaux donnent

$$\det(M) \det(D) \det(I_n) = \det(AD - BC) \det(D).$$

Si D est inversible, on peut simplifier par $\det(D) \neq 0$ et il vient bien $\det(M) = \det(AD - BC)$.

Q 34. Par définition, $\mathbb{C} \ni x \in \text{Sp}(D)$ si, et seulement si, la matrice $D - xI_n$ n'est pas inversible. Comme $\{-1/p; p \in \mathbb{N}^*\}$ est infini, il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $p \geq p_0$, la matrice $D + \frac{1}{p}I_n$ soit inversible.

Q 35. D'après la question Q 34, on peut appliquer la question Q 33 à $D \leftarrow D + \frac{1}{p}I_n$, qui est inversible pour tout $p \geq p_0$ d'après Q 34 et commute également avec C , ce qui donne, par continuité du déterminant,

$$\det(M) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D + \frac{1}{p}I_n \end{pmatrix} = \det \left(AD - BC + \frac{1}{p}A \right) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \det(AD - BC).$$

Considérons une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et formons la matrice par blocs $N = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix}$.

Q 36. Calculons le polynôme caractéristique de N . Pour $x \in \mathbb{C}$,

$$\chi_N(x) = \begin{vmatrix} xI_n & -I_n \\ -M & xI_n \end{vmatrix} \stackrel{(\mathcal{L}_2 \leftarrow \mathcal{L}_2 + x\mathcal{L}_1)}{=} \begin{vmatrix} xI_n & -I_n \\ x^2I_n - M & 0_n \end{vmatrix} \stackrel{(\mathcal{L}_1 \leftrightarrow \mathcal{L}_2)}{=} (-1)^n \begin{vmatrix} x^2I_n - M & 0_n \\ xI_n & -I_n \end{vmatrix} = \chi_M(x^2).$$

Les racines du polynôme caractéristique étant les valeurs propres, il vient $\text{Sp}(N) = \{\mu \in \mathbb{C}; \mu^2 \in \text{Sp}(M)\}$.

Q 37. Soient $\mu \in \text{Sp}(N)$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ^2 . Alors,

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ Mx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu^2 x \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix}.$$

Comme $\neq 0_{n,1}$, il est clair que $\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} \neq 0_{2n,1}$ et est donc bien vecteur propre de N associé à la valeur propre μ .

Q 38. D'après la question Q 36 et le fait qu'une matrice est inversible si, et seulement si, 0 n'en est pas valeur propre, l'inversibilité des matrices M et N sont équivalentes. Supposons maintenant M diagonalisable et inversible. Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $Mx_k = \mu_k^2 x_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soient $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{C}^{2n}$. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \alpha_k \begin{pmatrix} x_k \\ \mu_k x_k \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^n \beta_k \begin{pmatrix} x_k \\ \mu_k x_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)x_n \\ (\alpha_1 - \beta_1)\mu_1 x_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\mu_n x_n \end{pmatrix} = 0_{2n,1} \\ \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket: \begin{cases} \alpha_k + \beta_k = 0 \\ \mu_k(\alpha_k - \beta_k) = 0 \end{cases} &\iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket: \alpha_k = \beta_k = 0, \end{aligned}$$

la première équivalence venant du fait que (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre. Ainsi, la famille des $2n$ vecteurs $\begin{pmatrix} x_k \\ \pm \mu_k x_k \end{pmatrix}$ est une famille libre de vecteurs propres de N , ce qui montre que N est diagonalisable.

Remarque. En reprenant le calcul du polynôme caractéristique par opérations élémentaires, on a montré que

$$\text{rg}(\mu I_{2n} - N) = \text{rg} \begin{pmatrix} \mu^2 I_n - M & 0_n \\ \mu I_n & -I_n \end{pmatrix}.$$

En notant $(L_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ les lignes de cette matrice, la deuxième colonne par blocs assure que

$$\text{Vect}(L_1, \dots, L_n) \cap \text{Vect}(L_{n+1}, \dots, L_{2n}) = \{0\} \quad \therefore \quad \text{rg}(\mu I_{2n} - N) = \text{rg}(\mu^2 I_n - M) + n.$$

En sommant selon les valeurs de μ^2 , il vient que si les matrices sont inversibles, N est diagonalisable si, et seulement si, M l'est et que si elles ne sont pas inversible, N n'est jamais diagonalisable.

II.2 – Application à un système différentiel dans le cas où $n = 2$

Q 39. On considère le système différentiel

$$(1) \quad \begin{cases} x_1'' = -2x_1 + x_2, \\ x_2'' = x_1 - 2x_2. \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Le système s'écrit donc bien sous la forme $X' = BX$, avec $X = (x_1 \ x_2 \ x_1' \ x_2')^\top$ et $B = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ A_2(-2, 1) & 0_2 \end{pmatrix}$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre que l'ensemble des solutions de ce système est un espace vectoriel de dimension 4.

Q 40. La matrice $A_2(\alpha, \beta)$ est diagonalisable, parce qu'elle est symétrique réelle... ou parce qu'on l'a prouvé à la question Q 26. Elle est par ailleurs inversible (déterminant $3 \neq 0$). D'après la question Q 38, B est diagonalisable et

$$\text{Sp}(A) = \left\{ -2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), -2 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right\} = \{-3, -1\} \quad \therefore \quad \text{Sp}(B) = \{-i, i, -i\sqrt{3}, i\sqrt{3}\}.$$

On considère la matrice $D = \text{diag}(-i\sqrt{3}, i\sqrt{3}, -i, i)$.

Q 41. La question Q 32 (ou un calcul direct) permet de déterminer les sous-espaces propres de $A_2(-2, 1)$:

$$\ker(A_2(-2, 1) + I_2) = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ et } \ker(A_2(-2, 1) + 3I_2) = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

D'après la question Q 37, on a donc :

$$\begin{aligned} \ker(B - iI_4) &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix} \right\}, \quad \ker(B + iI_4) = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix} \right\}, \\ \ker(B - \sqrt{3}iI_4) &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i\sqrt{3} \\ -i\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{et } \ker(B + \sqrt{3}iI_4) = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Donc, si l'on prend pour $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ la matrice de passage suivante entre la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ et une base de vecteurs propres de B adéquate :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -i\sqrt{3} & i\sqrt{3} & -i & i \\ i\sqrt{3} & -i\sqrt{3} & -i & i \end{pmatrix}$$

la formule du changement de base implique $B = PDP^{-1}$.

Q 42. La matrice D est diagonale, donc bien sûr diagonalisable, de valeurs propres les coefficients diagonaux, et ses éléments propres sont les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$. Un système fondamental de solutions de $Y' = DY$ est donc (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) , où :

$$Y_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{-i\sqrt{3}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}, \quad Y_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{i\sqrt{3}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases},$$

$$Y_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{-it} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}, Y_4 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{it} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Autrement dit : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ vérifie $Y' = DY$ si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = \alpha Y_1(t) + \beta Y_2(t) + \gamma Y_3(t) + \delta Y_4(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-i\sqrt{3}t} \\ \beta e^{i\sqrt{3}t} \\ \gamma e^{-it} \\ \delta e^{it} \end{pmatrix}.$$

Q 43. Soient x_1 et x_2 deux applications à valeurs complexes et de classe C^2 sur \mathbb{R} . Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X$,

où P est la matrice de la question Q42, alors $Y' = P^{-1}X'$, et x_1 et x_2 sont solutions du système (2) de l'énoncé si et seulement si :

$$\begin{aligned} X' = BX &\iff X' = PDP^{-1}X \stackrel{[P^{-1} \times]}{\iff} P^{-1}X' = DP^{-1}X \\ &\iff Y' = DY \\ &\iff \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4, \forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-i\sqrt{3}t} \\ \beta e^{i\sqrt{3}t} \\ \gamma e^{-it} \\ \delta e^{it} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si et seulement si (après multiplication à gauche par P) il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = P \begin{pmatrix} \alpha e^{-i\sqrt{3}t} \\ \beta e^{i\sqrt{3}t} \\ \gamma e^{-it} \\ \delta e^{it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^{-i\sqrt{3}t} + \beta e^{i\sqrt{3}t} + \gamma e^{-it} + \delta e^{it} \\ -\alpha e^{-i\sqrt{3}t} - \beta e^{i\sqrt{3}t} + \gamma e^{-it} + \delta e^{it} \\ -i\sqrt{3}\alpha e^{-i\sqrt{3}t} + i\sqrt{3}\beta e^{i\sqrt{3}t} - i\gamma e^{-it} + i\delta e^{it} \\ i\sqrt{3}\alpha e^{-i\sqrt{3}t} - i\sqrt{3}\beta e^{i\sqrt{3}t} - i\gamma e^{-it} + i\delta e^{it} \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut, étant donné que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$, à l'existence de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1(t) = \alpha e^{-i\sqrt{3}t} + \beta e^{i\sqrt{3}t} + \gamma e^{-it} + \delta e^{it}, \\ x_2(t) = -\alpha e^{-i\sqrt{3}t} - \beta e^{i\sqrt{3}t} + \gamma e^{-it} + \delta e^{it}. \end{cases}$$

On cherche à présent à quelle condition on a : $(x_1(0), x_2(0), x_1'(0), x_2'(0)) = (1, 0, 0, 0)$. Ces conditions équivalent au système linéaire :

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{cccc} \alpha & +\beta & +\gamma & +\delta & = & 1 \\ -\alpha & -\beta & +\gamma & +\delta & = & 0 \\ -\sqrt{3}\alpha & +\sqrt{3}\beta & -\gamma & +\delta & = & 0 \\ \sqrt{3}\alpha & -\sqrt{3}\beta & -\gamma & +\delta & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{cccc} \alpha & +\beta & +\gamma & +\delta & = & 1 \\ & & 2\gamma & +2\delta & = & 1 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ -\sqrt{3}\alpha & +\sqrt{3}\beta & -\gamma & +\delta & = & 0 \\ & & -2\gamma & +2\delta & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array} \right. \\
 \iff \left\{ \begin{array}{cccc} \alpha & +\beta & & & = & \frac{1}{2} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2) \\ & & 2\gamma & +2\delta & = & 1 \\ -\sqrt{3}\alpha & +\sqrt{3}\beta & -\gamma & +\delta & = & 0 \\ & & & 4\delta & = & 1 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \end{array} \right. \\
 \iff \left\{ \begin{array}{cccc} \alpha & +\beta & & & = & \frac{1}{2} \\ & & \gamma & & = & \frac{1}{4} \\ -\sqrt{3}\alpha & +\sqrt{3}\beta & & & = & 0 \\ & & & \delta & = & \frac{1}{4} \end{array} \right. \\
 \iff \left\{ \begin{array}{cccc} \alpha & +\beta & & & = & \frac{1}{2} \\ & & \gamma & & = & \frac{1}{4} \\ & & 2\sqrt{3}\beta & & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + \sqrt{3}L_1) \\ & & & \delta & = & \frac{1}{4} \end{array} \right. \\
 \iff \alpha = \gamma = \beta = \delta = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

En conclusion, l'unique couple solution du système linéaire (2) de l'énoncé à vérifier les conditions initiales prescrites est défini par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) & = & \frac{1}{4} (e^{-i\sqrt{3}t} + e^{i\sqrt{3}t}) + \frac{1}{4} (e^{-it} + e^{it}) = \frac{1}{2} \cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2} \cos(t), \\ x_2(t) & = & -\frac{1}{4} (e^{-i\sqrt{3}t} + e^{i\sqrt{3}t}) + \frac{1}{4} (e^{-it} + e^{it}) = -\frac{1}{2} \cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2} \cos(t). \end{cases}$$