CCMP — PSI — Mathématiques 2 — 2026 — corrigé

Probabilité qu'un entier uniformément choisi dans $[\![1, n]\!]$ soit sans facteur à la puissance k

La partie 1 permet d'obtenir un développement en série utilisé dans la partie 2.

La partie 2 n'utilise que le développement en série obtenu à la dernière question de la partie 1 et en est indépendante, cette question exceptée. Cette partie 2 permet un calcul effectif de proche en proche des valeurs de la fonction zêta en un entier pair non nul à partir des nombres de Bernoulli.

La partie 3 est indépendante des parties 1 et 2. La partie 4 utilise les valeurs obtenues à la dernière question de la partie 2 et est donc indépendante des parties 1 et 2, cette question exceptée.

Dans les parties 3 et 4, on se donne un entier naturel non nul n et un entier naturel $k \geqslant 2$. On s'intéresse au tirage uniforme d'un entier dans $[\![1, n]\!]$: on détermine la probabilité $q_n(k)$ que cet entier soit sans facteur à la puissance k. On montre enfin que, à k fixé, la suite $(q_n(k))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et l'on détermine sa limite.

I. Calcul de $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n^2 + x^2}}$

Q 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Comme $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} t| = t$ pour tout $t \in [0, 1]$, $t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ne peut valoir 1 que si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui est exclu. Par linéarité de l'intégrale et par sommation de la suite géométrique de raison $t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$, il vient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} t^{k-1}\,\mathrm{d}t \overset{(j=k-1)}{=} \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} t\right)^j \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} t\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} t}\,\mathrm{d}t.$$

Q 2. La fonction $t \longmapsto |1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} t|$ est continue sur le segment $[0, 1]$, où, comme on l'a vu à la question 1, elle ne s'anulle pas. En vertu du théorème des bornes atteintes, on a donc $m_\theta = \min\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} t| > 0$. Corrélativement,

$$\left|\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} t\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} t}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} t\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} t|}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{m_\theta(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\therefore \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t,$$

soit la convergence de la série et la valeur de sa somme. La question pouvait aussi se rédiger par application du théorème de convergence dominée *via* la convergence simple sur l'intervalle semi-ouvert $[0, 1[$ de la suite de fonction $(f_n)_n$ définie part $f_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, \dfrac{1 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} t\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} t}$ et la domination constante, donc trivialement intégrable, $2/m_\theta$.

Q 3. Comme $\dfrac{\sin(k\theta)}{k}$ est la partie imaginaire de $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{k}$, la question précédente assure la convergence de la série de terme général $\dfrac{\sin(k\theta)}{k}$ et que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \mathrm{Im}\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} t}\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^1 \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} t)}{|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} t|^2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin\theta}{|1 - t\cos\theta - \mathrm{i}t\sin\theta|^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin\theta}{1 - 2t\cos\theta + t^2}\,\mathrm{d}t.$$

L'expression ci-dessus est valable sous les hypothèses des questions antérieures, soit pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On suppose désormais que $\theta \in]0, \pi[$. Pour calculer l'intégrale, on peut utiliser l'indication... ou s'en passer, le calcul de primitive étant standard : en notant que $\sin\theta \neq 0$,

$$\int_0^1 \frac{\sin\theta}{1-2t\cos\theta+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin\theta}{(t-\cos\theta)^2+\sin\theta}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin\theta}{\sin\theta}\left[\arctan\left(\frac{t-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right]_0^1$$
$$= \arctan\left(\frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}\right) - \arctan(-\operatorname{cotan}\theta) = \arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + \arctan(\operatorname{cotan}\theta).$$

Comme $0<\theta<\pi$, on a $\arctan(\tan(\theta/2)) = \theta/2$. Par ailleurs, si $0<\theta<\pi/2$, $\operatorname{cotan}\theta>0$, d'où

$$\arctan(\operatorname{cotan}\theta) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\tan\theta) = \frac{\pi}{2}-\theta \qquad \therefore \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

De manière similaire, pour $\pi/2<\theta<\pi$, $\operatorname{cotan}\theta<0$, d'où

$$\arctan(\operatorname{cotan}\theta) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(\tan\theta) = -\frac{\pi}{2} - (\theta-\pi) = \frac{\pi}{2}-\theta \qquad \therefore \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

Enfin, pour $\theta=\pi/2$, on a $\arctan(\operatorname{cotan}\theta)=0$ et la somme vaut donc $\pi/4$, ce qui est bien le résultat attendu.

Q 4. Pour $t\in\mathbb{R}$, on pose $S(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nt)}{n^2}$. De $\left\|\dfrac{\cos(nt)}{n^2}\right\|_\infty = \dfrac{1}{n^2}$, on déduit la convergence normale de la série sur $\mathbb{R}$. Les fonctions sommées étant continues et la convergence normale entraînant les convergences simple et uniforme, S est bien définie (CVS) et continue (CVU) sur $\mathbb{R}$.

Q 5. Sous réserve de pouvoir dériver S terme à terme, il vient $S'(\theta) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n} \overset{(Q3)}{=} \frac{\theta-\pi}{2}$ et l'on peut espérer en déduire l'expression de S par intégration.

Vu ce qui a été établi à la question précédente, il reste à montrer la convergence uniforme de la série dérivée. Cette série n'étant normalement convergente sur aucun intervalle, on reprend les calculs faits en début de partie.

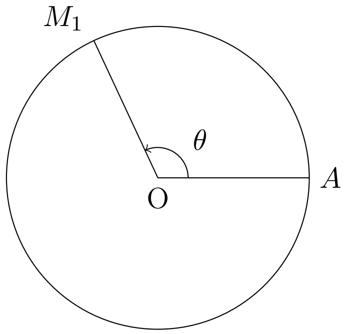
$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{k} \overset{(Q1,\,Q2)}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\frac{1-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}t)^n}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}t}\,\mathrm{d}t \qquad \therefore$$
$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin(k\theta)}{k}\right| \overset{|\operatorname{Im}(z)|\leqslant|z|}{\leqslant} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{k}\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}t|}\,\mathrm{d}t.$$

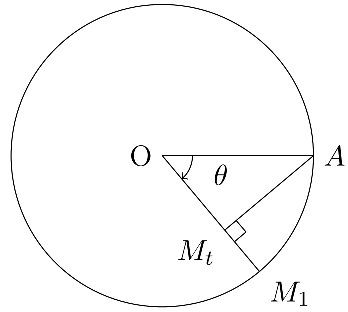
La fonction $(\theta,t)\longmapsto|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}t|$ est continue sur $[0,\pi]\times[0,1]$, où elle s'annule en l'unique point $(0,1)$. On se restreint donc au fermé-borné $[\eta,\pi]\times[0,1]$ avec $0<\eta<\pi$, et le théorème des bornes atteintes permet à nouveau de minorer $|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}t|$ par une constante non nulle ce qui permet de raisonner comme à la question 2 et donne la convergence uniforme de la série dérivée sur tout intervalle de la forme $[\eta,\pi]$. Ainsi, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$. On peut alors intégrer :

$$\forall(\eta,\theta)\in]0,\pi]^2 \colon S(\theta) = S(\eta) + \int_\eta^\theta S'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = S(\eta) + \int_\eta^\theta \frac{\tau-\pi}{2}\,\mathrm{d}\tau = S(\eta) + \frac{(\theta-\pi)^2-(\eta-\pi)^2}{4}.$$

En faisant tendre η vers 0 et en utilisant la continuité de S en 0 : $S(\theta) = S(0) + \dfrac{(\theta-\pi)^2-\pi^2}{4} = S(0) + \dfrac{\theta^2}{4} - \dfrac{\pi\theta}{2}$.

Remarque. Il est possible de calculer $m_\theta = \min\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}t|$ en raisonnant sur le triangle (O,A,M_1), où O est l'origine, $A(1,0)$ et M_1 le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ (voir la figure). Par définition, $m_\theta = \mathrm{d}(A,[\mathrm{O}M_1])$. Si $\cos\theta\leqslant 0$, le triangle est obtus et il est immédiat que la distance est atteinte à l'origine, soit $m=1$. Si $\cos\theta>0$, alors m est atteint au point t tel que le point M_t d'affixe $t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ soit le projeté orthogonal de A sur $(\mathrm{O}M_1)$. Les relations trigonométriques classiques dans le triangle rectangle (O,A,M_t) montrent que $m_\theta = AM_t = |\sin\theta|>0$. Sans utiliser le théorème des bornes atteintes, on a alors la majoration explicite de $\dfrac{t^n}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}t|}\leqslant\dfrac{t^n}{\sin\eta}$.





Q 6. Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on pose $u_{x,n}(t) = \dfrac{\cos(nt)}{n^2(n^2+x^2)}$ et $g_x(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_{x,n}(t)$. Il est clair que les fonctions $u_{x,n}$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ et l'on calcule facilement

$$\|u_{x,n}\|_\infty = \frac{1}{n^2(n^2+x^2)} \leqslant \frac{1}{n^4}, \quad u'_{x,n}(t) = -\frac{\sin(nt)}{n(n^2+x^2)}, \ \|u'_{x,n}\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^3} \quad \text{et} \quad u''_{x,n}(t) = -\frac{\cos(nt)}{n^2+x^2}, \ \|u''_{x,n}\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Il s'ensuit que les trois séries $\sum u_{x,n}$, $\sum u'_{x,n}$ et $\sum u''_{x,n}$ convergent normalement, donc uniformément, ce qui assure que g_x est de classe $\mathscr{C}^2$ et que ses dérivées s'obtiennent en dérivant la série terme à terme. Corrélativement,

$$g''_x(t) - x^2 g_x(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2+x^2} - x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2(n^2+x^2)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2+x^2}\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2} = -S(t).$$

Q 7. Pour $P(t) = at^2 + bt + c$, on reporte dans l'équation ce qui donne par identification des coefficients dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[t]$,

$$2a - x^2(at^2+bt+c) = -\frac{t^2}{4} + \frac{\pi t}{2} - S(0) \iff \begin{cases} -ax^2 = -1/4 \\ -bx^2 = \pi/2 \\ 2a - cx^2 = -S(0) \end{cases} \iff P(t) = \frac{t^2}{4x^2} - \frac{\pi t}{2x^2} + \frac{S(0)}{x^2} + \frac{1}{2x^4}.$$

Q 8. D'après la question 6, $g'_x(t) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n(n^2+x^2)}$, d'où $g'_x(0) = g'_x(\pi) = 0$. Par ailleurs, g_x et la fonction polynomiale P sont solution de la même équation différentielle linéaire, donc $g_x - P$ est solution de l'équation homogène associée par linéarité de la dérivation. Cette équation homogène est $y''(t) - x^2 y(t) = 0$, dont, x étant non nul, les solutions forment le plan vectoriel engendré par $t \mapsto \operatorname{ch}(xt)$ et $t \mapsto \operatorname{sh}(xt)$. Ainsi,

$$\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R} \colon g_x(t) - P(t) = \alpha \operatorname{ch}(xt) + \beta \operatorname{sh}(xt) \qquad \overset{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}{\therefore} \qquad g'_x(t) + \frac{\pi - t}{2x^2} = \alpha x \operatorname{sh}(xt) + \beta x \operatorname{ch}(xt).$$

En évaluant en $t = 0$ et en $t = \pi$, il vient $\dfrac{\pi}{2x^2} = \beta x$ et $0 = \alpha x \operatorname{sh}(x\pi) + \beta x \operatorname{ch}(x\pi)$, d'où $\beta = \dfrac{\pi}{2x^3}$ et $\alpha = -\dfrac{\pi \operatorname{ch}(x\pi)}{2x \operatorname{sh}(x\pi)}$. Enfin, en reportant $t = 0$ dans $g''_x(t) = P''(t) + \alpha x^2 \operatorname{ch}(xt) + \beta x^2 \operatorname{sh}(xt)$ et en passant de l'expression hyperbolique à l'expression exponentielle, il vient

$$g''_x(0) = \frac{1}{2x^2} + \alpha x^2 = \frac{1}{2x^2} - \frac{\pi \operatorname{ch}(x\pi)}{2x \operatorname{sh}(x\pi)} = \frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x} \times \frac{1 + \mathrm{e}^{-2\pi x}}{1 - \mathrm{e}^{-2\pi x}}.$$

Q 9. D'après les questions 6 et 8, on a

$$g''_x(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2} = \frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x} \times \frac{1+\mathrm{e}^{-2\pi x}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi x}} \qquad \therefore$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{n^2+x^2} = 1 - \pi x \left(1 + \frac{2\mathrm{e}^{-2\pi x}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi x}}\right) \qquad \therefore \qquad \frac{2\pi x}{\mathrm{e}^{2\pi x} - 1} = 1 - \pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{n^2+x^2}.$$

II. Développement en série entière de $\mathbf{x} \longmapsto \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{e^x - 1}}$ et applications

On introduit la fonction h définie par $h\colon x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Q 10. On applique l'identité géométrique $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{N+1}}{1-t}$, valable pour tout $t \neq 1$, à $1 \neq t = -\dfrac{x^2}{n^2}$, où $(x, n) \in]-1, 1[\times \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{x^2 + n^2} = \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{1-t} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{N} \left(-\frac{x^2}{n^2}\right)^k + \underbrace{(-1)^{N+1} \frac{x^{2N+2}}{n^{2N+2}} \times \frac{1}{x^2 + n^2}}_{R_{N,n}(x)}.$$

De plus, $|R_{N,n}(x)| \leqslant \dfrac{x^{2N+2}}{n^{2N+2}}$ d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} |R_{N,n}(x)| \leqslant x^{2N+2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2n+2}} = \zeta(2N+2)|x|^{2N+2},$$

par linéarité de la sommation, la convergence de la série étant assurée par le théorème de comparaison et la convergence de la série de Riemann $(2N + 2 > 1)$. Notons que l'on aurait aussi pu majorer par $\zeta(2N+4)|x|^{2N+2}$.

Q 11. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{n^x}$ étant décroissante, il y a convergence normale de la fonction zeta sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 1$. Le théorème de la double limite s'applique et donne

$$\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n,1} = 1.$$

On repart de l'identité de la question 10, multipliée par x^2, soit

$$\frac{x^2}{x^2 + n^2} = \frac{x^2}{n^2} \sum_{k=0}^{N} \left(-\frac{x^2}{n^2}\right)^k + x^2 R_{N,n}(x).$$

La série $\displaystyle\sum_n \frac{x^2}{x^2 + n^2}$ est convergente par comparaison avec la série de Riemann d'exposant 2 et la série $\displaystyle\sum_n x^2 R_{N,n}(x)$ est absolument convergente, donc convergente en vertu de la question 10. Par linéarité, la série du milieu est donc également convergente et l'on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2} \sum_{k=0}^{N} \left(-\frac{x^2}{n^2}\right)^k + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} R_{N,n}(x).$$

Par linéarité,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2} \sum_{k=0}^{N} \left(-\frac{x^2}{n^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k x^{2k+2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k x^{2k+2} \zeta(2k+2) = \sum_{k=1}^{N+1} (-1)^{k-1} x^{2k} \zeta(2k).$$

On peut alors faire tendre N vers l'infini. La somme partielle ci-dessus converge et la deuxième série tend vers 0 par la question 10. *In fine*,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{2k} \zeta(2k) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \zeta(2k) x^{2k}.$$

Q 12. On reprend l'identité obtenue à la question 9 avec $x \leftarrow x/2\pi$, puis on. utilise le développement en série entière obtenu à la question 12.

$$h(x) = \frac{x}{e^x - 1} \overset{(\text{Q9})}{=} 1 - \frac{\pi x}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}{n^2 + \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}$$

$$\overset{(\text{Q11})}{=} 1 - \frac{x}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \zeta(2k) \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2k} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1} \pi^{2k}} x^{2k}$$

La question 9 ne suppose que $x \neq 0$. La question 11 impose $\left|\dfrac{x}{2\pi}\right| < 1$, soit $x \in]-2\pi, 2\pi[$. Pour $x = 0$, l'identité est évidente ($1 = 1$).

On pose $b_k = h^{(k)}(0)$. Par unicité du développement en série entière, on a $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} x^k$, d'où $b_0 = 1$, $b_1 = -\dfrac{1}{2}$, $b_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $b_{2k} = (-1)^{k+1} \dfrac{(2k)!\,\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q 13. L'identité évidente $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \times \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$ se traduit par le produit de Cauchy $h(x) \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = 1$. Les deux séries étant de rayon de convergence non nul (au moins 2π pour la première $+\infty$ pour la deuxième), il vient

$$\forall n \geqslant 1\colon\ \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} \times \frac{1}{(n-k+1)!} = 0.$$

Q 14. On reprend la relation de la question 13 pour $n = 2$, puis $n = 4$. Il vient

$$\begin{aligned}
\frac{b_0}{0!\,3!} + \frac{b_1}{1!\,2!} + \frac{b_2}{2!\,1!} &= 0 \qquad \therefore \qquad b_2 = -2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6},\\
\frac{b_0}{5!} + \frac{b_1}{4!} + \frac{b_2}{2!\,3!} + \frac{b_4}{4} &= 0 \qquad \therefore \qquad b_4 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30}.
\end{aligned}$$

En identifiant avec l'expression de b_{2k} trouvée à la question 12, il vient $\zeta(2) = \dfrac{2\pi^2 b_2}{2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = -\dfrac{2^3\pi^4 b_4}{4!} = \dfrac{\pi^4}{90}$.

III. Probabilité qu'un entier naturel pris uniformément dans $[\![1, \mathbf{n}]\!]$ soit sans facteur à la puissance k

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, dont l'on numérote la suite par ordre croissant, soit

$$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \ldots) = (2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots).$$

Pour k entier naturel au moins égal à 2, on dit que n est sans facteur à la puissance k si $\{p \in \mathcal{P}\,;\ p^k \,|\, n\} = \varnothing$. De manière équivalente, si $n = \displaystyle\prod_{q \in \mathcal{Q}} q^{\alpha(q)}$ est la décomposition de n en produit de facteurs premiers avec, donc $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$), alors $\alpha(q) \leqslant k - 1$ pour tout $q \in \mathcal{Q}$.

Q 15. À mes yeux, c'est du cours, c'est évident et, en plus, pas si évident à démontrer formellement. On commence par compacter l'expression du développement :

$$\sum_{m=0}^{r} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}, = \sum_{m=0}^{r} \sum_{\substack{I \subset [\![1,r]\!] \\ \#I = m}} \prod_{i \in I} x_i = \sum_{I \subset [\![1,r]\!]} \prod_{i \in I} x_i,$$

en isolant *in fine* le cas de $I = \varnothing$ ($m = 0$).

Sous cette forme, on raisonne par récurrence simple sur r. La formule est claire pour $r = 1$: les deux sous-ensembles de $\{1\}$ sont $\varnothing$, qui donne le produit vide 1 et $\{1\}$, qui donne x_1. Admettons la formule à l'ordre r. Alors,

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{r+1} (1 + x_i) &= (1 + x_{r+1}) \prod_{i=1}^{r} (1 + x_i) = (1 + x_{r+1}) \sum_{I \subset [\![1,r]\!]} \prod_{i \in I} x_i \\
&= \sum_{I \subset [\![1,r]\!]} \prod_{i \in I} x_i + \sum_{I \subset [\![1,r]\!]} x_{r+1} \prod_{i \in I} x_i = \sum_{\substack{I \subset [\![1,r+1]\!] \\ r+1 \notin I}} \prod_{i \in I} x_i + \sum_{\substack{I \subset [\![1,r+1]\!] \\ r+1 \in I}} \prod_{i \in I} x_i = \sum_{I \subset [\![1,r+1]\!]} \prod_{i \in I} x_i.
\end{aligned}$$

Dans les deux questions suivantes, on considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

Q 16. La relation $A \uplus \overline{A} = \Omega$ donne $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{\overline{A}} = \mathbf{1}_\Omega = 1$. Par ailleurs

$$\Omega \ni \omega \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m \iff \forall i \in [\![1,m]\!] \colon \omega \in A_i \iff \forall i \in [\![1,m]\!] \colon \mathbf{1}_A(\omega) = 1 \iff \prod_{i=1}^m \mathbf{1}_{A_i}(\omega) = 1,$$

ce qui montre que $\mathbf{1}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m} = \mathbf{1}_{A_1}\mathbf{1}_{A_2}\cdots\mathbf{1}_{A_m}$.

Q 17. On utilise l'ensemble des résultats des questions 15 et 16.

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_r} &= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A_1\cup\cdots\cup A_r}} = 1 - \mathbf{1}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_r}} = 1 - \prod_{i=1}^r \mathbf{1}_{\overline{A_i}} = 1 - \prod_{i=1}^r (1 - \mathbf{1}_{A_i}) \\ &= -\sum_{m=1}^r \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant r} (-\mathbf{1}_{A_{i_1}})\cdots(-\mathbf{1}_{A_{i_m}}) = \sum_{m=1}^r (-1)^{m+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant r} \mathbf{1}_{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_m}} \quad \therefore\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(A_1\cup\cdots\cup A_r) = \sum_{m=1}^r (-1)^{m+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant r} \mathbf{P}(A_1\cap\cdots\cap A_m)$$

par linéarité de l'espérance. C'est la *formule du crible de Poincaré* (sans doute parce qu'elle est due à de Moivre), *inclusion-exclusion principle* en anglais, *Einschluss-Ausschluss Verfahren* pour les germanistes.

Dans la suite de cette partie, on se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $r = \#(\mathcal{P} \cap [\![2,n]\!])$, ce qui équivaut, avec les notations introduites en début de troisième partie, à $p_r \leqslant n < p_{r+1}$. On se donne également un entier naturel $n \geqslant 2$. On considère l'espace probabilisé $\big([\![1,n]\!], \mathscr{P}([\![1,n]\!]), \mathbf{P}_n\big)$, où $\mathbf{P}_n$ est la mesure d'équiprobabilité, soit $\mathbf{P}_n(A) = \dfrac{\#A}{n}$. On note

$$S_n(k) = \big\{m \in [\![1,n]\!]\,;\ \forall j \in [\![1,r]\!] \colon p_j^k \nmid m\big\}.$$

On pose encore $q_n(k) = \mathbf{P}_n(S_n(k))$, la probabilité qu'un entier pris uniformément dans $[\![1,n]\!]$ soit sans facteur à la puissance k. Enfin, pour $d \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n(d) = \big\{j \in [\![1,n]\!]\,;\ d \,|\, j\big\}$ l'ensemble des entiers au plus égaux à n multiples de d.

Q 18. On note que $\overline{S_n(k)} = \bigcup_{j=1}^r A_n(p_j^k)$ (p_j^k divise m pour au moins une valeur de $j \in [\![1,r]\!]$). Il s'ensuit, en utilisant la formule du crible,

$$\begin{aligned} q_n(k) = \mathbf{P}_n(S_n(k)) &= 1 - \mathbf{P}_n\big(\overline{S_n(k)}\big) = 1 - \mathbf{P}_n\big[A_n(p_1^k)\cup\cdots\cup A_n(p_r^k)\big] \\ &= 1 - \sum_{m=1}^r (-1)^{m+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant r} \mathbf{P}_n\big[A_n(p_1^k))\cap\cdots\cap A_n(p_r^k)\big] \\ &= 1 + \sum_{m=1}^r (-1)^m \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant r} \mathbf{P}_n\big[A_n(p_1^k))\cap\cdots\cap A_n(p_r^k)\big]\end{aligned}$$

On introduit la fonction de Möbius $\mu \colon \mathbb{N}^* \to \{-1,0,1\}$, définie par

$$\mu(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1, \\ (-1)^q & \text{si } m \text{ est le produit de } q \geqslant 1 \text{ facteurs premiers } \textit{distincts}, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On peut noter (ce n'est pas dit dans l'énoncé) que $\mu(m) \neq 0$ si, et seulement si, m est sans facteur à la puissance 2. En théorie des nombres, il est classique d'appeler ces nombres *quadratfrei* (sans facteur carré).

Q 19. Montrons que

$$q_n(k) = 1 + \sum_{d\in\mathcal{Q}_r} \mu(d)\,\mathbf{P}_n(A_n(d^k)) = 1 + \sum_{d=2}^\infty \mu(d)\,\mathbf{P}_n(A_n(d^k)),$$

où $\mathcal{Q}_r$ est l'ensemble des entiers au moins égaux à 2, sans facteurs carrés, et dont les facteurs premiers appartiennent à $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$. La première expression n'est qu'une reformulation de l'identité prouvée à la question précédente.

La deuxième vient du fait que la contribution des entiers $d \notin \mathcal{Q}_r$ est nulle car, s'ils ne sont pas sans facteur carré, on a $\mu(d) = 0$ et si $d \geqslant 2$ admet au moins un facteur premier p_i avec $i > r$, alors $d \geqslant p_i > n$, donc $A_n(d) = \varnothing$ et $\mathbf{P}_n(A_n(d)) = 0$. Par ailleurs,

$$A_n(d) = \{md\,;\ m \in \mathbb{N}\, md \leqslant n\} \qquad \therefore \qquad \mathbf{P}_n(A_n(d)) = \frac{\# A_n(d)}{n} = \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor.$$

On peut conclure : en notant que $\mu(1)\left\lfloor \frac{n}{1^k} \right\rfloor = 1$, il vient

$$q_n(k) = 1 + \sum_{d=2}^{\infty} \mu(d) \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor = \frac{1}{n}\sum_{d=1}^{\infty} \mu(d)\left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor.$$

Q 20. On suit l'indication. Soient $f_n\colon [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ et $f\colon [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ les fonction en escalier définie par

$$\forall d \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [d, d+1[\ :\ f_n(t) = \frac{\mu(d)}{n}\left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor \quad \& \quad f(t) = \frac{\mu(d)}{d^k}.$$

La fonction f_n est nulle sur $\big]\lceil \sqrt[k]{n} \rceil, +\infty\big[$, donc elle est intégrable et

$$\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{d=1}^{\infty} \int_d^{d+1} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{n}\left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor = q_n(k).$$

Montrons que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f.

$$\forall n, d\colon 0 \leqslant \frac{n}{d^k} - \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor < 1 \qquad \therefore \qquad \left| \frac{\mu(d)}{n}\left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor - \frac{\mu(d)}{d^k} \right| \leqslant \frac{1}{n} \qquad \therefore \qquad \|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{1}{n}.$$

Il y a donc convergence uniforme, ce qui ne suffit pas à conclure, l'intervalle d'intégration n'étant pas borné. Concernant la domination,

$$|f_n(t)| \leqslant |f(t)| \leqslant \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^k} \mathbf{1}_{[d,d+1[} = h.$$

La fonction h est positive et intégrable et l'on a précisément $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = \zeta(k)$.

IV. Calcul de la somme $\displaystyle\sum_{\mathbf{d}=\mathbf{1}}^{\infty} \frac{\mu(\mathbf{d})}{\mathbf{d}^{\mathbf{k}}}$

Dans les deux questions suivantes, que l'on peut comprendre comme l'introduction d'une variante multiplicative du produit de Cauchy, on prend $s > 1$ et l'on pose $u_i = \dfrac{\mu(i)}{i^s}$ et $v_i = \dfrac{1}{i^s}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on définit $E_N = [\![1, N]\!]^2$ et $F_N = \{(i,j) \in E_N^2\,;\ ij \leqslant N\}$.

Q 21. L'inclusion $F_N \subset E_N$ est triviale dans la mesure où F_N est défini comme un sous-ensemble de E_N. Cela étant, on a aussi $F_N = \{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\,;\ ij \leqslant N\}$... De plus, si $(i,j) \in E_N$, alors $ij \leqslant N^2$, d'où $E_N \subset F_{N^2}$.

Par ailleurs, il est important de noter que $F_N = \displaystyle\biguplus_{m \in [\![1,N]\!]} \{(i,j) \in E_N\,;\ ij = m\}$. Ainsi, en notant que $|u_i| v_j \geqslant 0$ pour tout couple (i,j),

$$\sum_{m=1}^{N} w_m = \sum_{m=1}^{N} \sum_{d\,|\,m} |u_d| v_{N/d} = \sum_{m=1}^{N} \sum_{\substack{(i,j)\in E_N \\ ij=m}} |u_i| v_j = \sum_{(i,j)\in F_N} |u_i| v_j \overset{(F_N \subset E_N)}{\leqslant} \sum_{(i,j)\in E_N} |u_i| v_j = \sum_{i=1}^{N} |u_i| \times \sum_{j=1}^{N} v_j.$$

Or, la série $\sum v_j$ est la série de Riemann d'exposant $s > 1$ et est donc convergente. Comme $|u_i| \leqslant v_i$, $\sum u_i$ est absolument convergente. Ainsi, la suite des sommes partielles de la série $\sum w_m$ est majorée, d'où la convergence de la suite $(S_N)_N$. En utilisant aussi l'inclusion $E_N \subset F_{N^2}$, on obtient l'encadrement

$$\sum_{(i,j)\in F_N} |u_i| v_j \leqslant \sum_{(i,j)\in E_N} |u_i| v_j \leqslant \sum_{(i,j)\in F_{N^2}} |u_i| v_j.$$

Le minorant et le majorant convergent vers $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ et le terme du milieu vers $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |u_i| \times \sum_{j=1}^{\infty} v_j$. En passant à la limite dans l'encadrement, il vient bien

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{d \,|\, m} |u_d| v_{m/d} = \sum_{i=1}^{\infty} |u_i| \times \sum_{j=1}^{\infty} v_j = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\mu(i)|}{i^s} \times \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^s} = \zeta(s) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\mu(i)|}{i^s}.$$

Q 22.

$$\sum_{i=1}^{N} u_i \times \sum_{j=1}^{N} v_j - \sum_{m=1}^{N} \sum_{d \,|\, m} u_d v_{m/d} = \sum_{(i,j) \in E_N} u_i v_j - \sum_{(i,j) \in F_N} u_i v_j \overset{(F_N \subseteq E_N)}{=} \sum_{(i,j) \in E_N \setminus F_N} u_i v_j \qquad \therefore$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} u_i \times \sum_{j=1}^{N} v_j - \sum_{m=1}^{N} \sum_{d \,|\, m} u_d v_{m/d} \right| \leqslant \sum_{(i,j) \in E_N \setminus F_N} |u_i| v_j = \sum_{(i,j) \in E_N} |u_i| v_j - \sum_{(i,j) \in F_N} |u_i| v_j \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

d'après la question précédente, d'où, les séries $\sum u_i$ et $\sum v_j$ étant convergentes, la convergence de $\sum w_m$ et l'identité

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \times \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^s} = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \times \sum_{j=1}^{\infty} v_j = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{d \,|\, m} u_d v_{m/d} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{ij=m} \frac{\mu(i)}{i^s j^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \sum_{d \,|\, m} \mu(d).$$

Q 23. Si $m = 1$, on a bien $\displaystyle\sum_{d \,|\, m} \mu(d) = \mu(1) = 1$. Soit $2 \leqslant m = \displaystyle\prod_{q \in \mathcal{Q}} q^{\alpha(q)}$ la décomposition de m en produit de facteurs premiers, $\mathcal{Q}$ étant donc l'ensemble non vide de ses diviseurs premiers. Posons $Q = \displaystyle\prod_{q \in \mathcal{Q}} q$. Alors, les diviseurs de m sans facteur carré sont les diviseurs de Q et

$$\sum_{d \,|\, m} \mu(d) = \sum_{d \,|\, Q} \mu(q) = \sum_{\mathfrak{q} \subset \mathcal{Q}} \mu\left(\prod_{q \in \mathfrak{q}} q \right) = \sum_{\mathfrak{q} \subset \mathcal{Q}} (-1)^{\#\mathfrak{q}} = \sum_{m=0}^{\#\mathcal{Q}} \sum_{\substack{\mathfrak{q} \subset \mathcal{Q} \\ \#\mathfrak{q} = m}} (-1)^m = \sum_{m=0}^{\#\mathcal{Q}} \binom{\#\mathcal{Q}}{m} (-1)^m = (1-1)^{\#\mathcal{Q}} = 0.$$

Q 24. En insérant le calcul fait à la question 23 dans la formule obtenue à la question 22, il vient

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \times \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \sum_{d \,|\, m} \mu(d) = 1 \qquad \therefore \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Q 25. On obtient immédiatement

$$\lim_{n \to \infty} q_n(k) \overset{(\text{Q } 20)}{=} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^k} \overset{(\text{Q } 24)}{=} \frac{1}{\zeta(s)} \qquad \therefore$$

$$\lim_{n \to \infty} q_n(2) = \frac{1}{\zeta(2)} \overset{(\text{Q } 14)}{=} \frac{6}{\pi^2} \quad \& \quad \lim_{n \to \infty} q_n(4) = \frac{1}{\zeta(4)} \overset{(\text{Q } 14)}{=} \frac{90}{\pi^4}.$$