

# Fonctions de plusieurs variables — Résumé

Ce chapitre traite des fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ . Le plus souvent,  $n \in \{2; 3\}$  et  $p = 1$ . La différence essentielle avec les situations connues réside dans le fait que  $n \neq 1$ . Comme on l'a vu dans le chapitre sur les fonctions vectorielles de la variable réelle, le fait que l'espace d'arrivée soit  $\mathbb{R}^p$  ne change pas grand chose car on se ramène au cas  $p = 1$  en considérant les fonctions coordonnées. Les cas  $n = 2$  et  $n = n$  sont similaires intrinsèquement et ne diffèrent que sur le plan notational. C'est pourquoi on se permettra le plus souvent de ne traiter que le cas  $n = 2$ .

Dans tout le texte,  $U$  désigne un ouvert non vide de l'espace de départ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{R}^n$ . Le calcul différentiel sur  $\mathbb{C}$  est très différent, même pour  $n = p = 1$  (toute fonction dérivable y est par exemple de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ) et totalement hors programme.

## 1. FONCTIONS VECTORIELLES DE LA VARIABLE RÉELLE

**1.1. Cadre et rappels.** On munit  $\mathbb{R}^m$  de sa structure euclidienne canonique. Soit  $I$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$ . Toute fonction  $F: I \rightarrow \mathbb{R}^m$  est représentée par ses fonctions coordonnées dans la base canonique :

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)).$$

Limites et continuité sont alors exprimables coordonnée par coordonnée : pour tout  $t_0 \in I$ ,

$$\begin{aligned} \forall L = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m: \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L &\iff \lim_{t \rightarrow t_0} \|F(t) - L\| = 0 \iff \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket: \lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = \ell_i, \\ F \text{ est continue en } t_0 &\iff \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0) \iff \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket: \lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = f_i(t_0) \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket: f_i \text{ est continue en } t_0. \end{aligned}$$

## 1.2. Dérivation d'ordre un.

### 1.2.1. Définition.

**Définition 1.** On dit que  $F: I \rightarrow \mathbb{R}^m$  est dérivable en  $t_0 \in I$  si  $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$  existe. Si c'est le cas, on note

$$F'(t_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}.$$

— Les limites étant prises coordonnée par coordonnée,  $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  est dérivable en  $t_0$  si, et seulement si,  $f_i$  est dérivable en  $t_0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  et l'on a alors

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \left( \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}, \dots, \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f_m(t) - f_m(t_0)}{t - t_0} \right) \\ &= (f'_1(t_0), f'_2(t_0), \dots, f'_m(t_0)). \end{aligned}$$

— Comme pour les fonctions réelles de la variable réelle,  $F$  est dérivable en  $t_0$  si, et seulement si,  $F$  admet un développement limité à l'ordre 1 en  $t_0$ ; ce développement limité est donné coordonnée par coordonnée. Ainsi, pour  $L = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m)$ ,

$$\begin{aligned} F(t) &= F(t_0) + (t - t_0)L + \mathfrak{o}(t - t_0) = (f_1(t_0), f_2(t_0), \dots, f_m(t_0)) + (t - t_0)(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m) + \mathfrak{o}(t - t_0) \\ &= (f_1(t_0) + \ell_1(t - t_0) + \mathfrak{o}(t - t_0), f_2(t_0) + \ell_2(t - t_0) + \mathfrak{o}(t - t_0), \dots, f_m(t_0) + \ell_m(t - t_0) + \mathfrak{o}(t - t_0)). \end{aligned}$$

— On étend de la même façon dérivées à droite et à gauche.

— Dans le développement limité, les «  $\mathfrak{o}(t - t_0)$  » n'ont pas tous la même signification : pour les fonctions coordonnées, il s'agit de quantité réelles négligeables devant  $t - t_0$  au sens habituel. Pour  $F$ , le développement limité vectoriel signifie que  $\|F(t) - F(t_0) - (t - t_0)L\| = \mathfrak{o}(t - t_0)$ . Notons que bien qu'on se contente en général dans ce chapitre de la structure euclidienne canonique, il n'y a pas d'ambiguïté en dimension finie car le fait d'être un  $\mathfrak{o}(t - t_0)$  ne dépend pas de la norme.

1.2.2. *Compositions.* 1) Soit  $\mathbb{R} \supset I \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^p$  avec  $F$  dérivable en  $t_0$  et  $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$  linéaire. On note  $G = \Phi \circ F$ . Alors,  $G$  est dérivable en  $t_0$  et  $G'(t_0) = \Phi(F'(t_0))$ . En effet,

$$\begin{aligned} G(t) &= \Phi\left(F(t_0) + (t - t_0)F'(t_0) + \mathfrak{o}((t - t_0))\right) \\ &\stackrel{\text{linéarité}}{=} G(t_0) + (t - t_0)\Phi(F'(t_0)) + \Phi(\mathfrak{o}((t - t_0))) = G(t_0) + (t - t_0)\Phi(F'(t_0)) + \mathfrak{o}((t - t_0)), \end{aligned}$$

où le terme de reste est justifié par le fait que  $\Phi$  étant linéaire et la dimension, finie, elle est lipschitzienne. Ainsi,  $G$  admet un développement limité à l'ordre 1 en  $t_0$ , donc est dérivable en  $t_0$  et l'on a bien la formule  $G'(t_0) = \Phi(F'(t_0))$ . Cette formule d'apparence peut-être un peu mystérieuse est immédiate dès que l'on prend un exemple en petite dimension : pour  $m = p = 2$ , si  $H(t) = (u(t), v(t)) = (2x(t) + 3y(t), x(t) - y(t))$ , alors

$$H'(t) = (u'(t), v'(t)) = (2x'(t) + 3y'(t), x'(t) - y'(t)).$$

2) Soit  $\mathbb{R} \supset I \xrightarrow{F, G} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^p$  avec  $F$  et  $G$  dérivables en  $t_0$  et  $\Phi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$  une application bilinéaire. On note  $H(t) = \Phi(F(t), G(t))$ . Alors,  $H$  est dérivable en  $t_0$  et l'on a

$$\begin{aligned} H'(t_0) &= \Phi(F'(t_0), G(t_0)) + \Phi(F(t_0), G'(t_0)) \quad \because \\ H(t) &= \Phi\left(F(t_0) + (t - t_0)F'(t_0) + \mathfrak{o}((t - t_0)), G(t_0) + (t - t_0)G'(t_0) + \mathfrak{o}((t - t_0))\right) \\ &\stackrel{\text{bilinéarité}}{=} \Phi(F(t_0), G(t_0)) + (t - t_0)\left[\Phi(F'(t_0), G(t_0)) + \Phi(F(t_0), G'(t_0))\right] + \Phi(\mathcal{O}(1), \mathfrak{o}(t - t_0)) \\ &= H(t_0) + (t - t_0)\left[\Phi(F'(t_0), G(t_0)) + \Phi(F(t_0), G'(t_0))\right] + \mathfrak{o}((t - t_0)), \end{aligned}$$

où le terme de reste est justifié par le fait que  $\Phi$  étant bilinéaire et la dimension, finie, on a l'existence d'une constante  $M$  telle que, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ,  $\|\Phi(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ .

3) Extension aux applications  $m$ -linéaires. Soit  $\mathbb{R} \supset I \xrightarrow{F_1, \dots, F_m} \mathbb{R}^{p_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{p_m} \xrightarrow{M} \mathbb{R}^n$  avec  $M$  une application  $m$ -linéaire, les fonctions  $F_i$  étant dérivables sur  $I$ . On note  $\beth(t) = M(F_1(t), F_2(t), \dots, F_m(t))$ . Alors,  $\beth$  est dérivable sur  $I$  et

$$\forall t \in I: \beth'(t) = M(F_1'(t), F_2(t), \dots, F_m(t)) + M(F_1(t), F_2'(t), \dots, F_m(t)) + \dots + M(F_1(t), F_2(t), \dots, F_m'(t)).$$

1.2.3. *Applications.*

- $n = m = p = 1$  et  $\Phi(x, y) = xy$ . On retrouve la règle de dérivation d'un produit de deux fonctions :  $(fg)' = f'g + fg'$ .
- $n = m, p = 1$  et  $\Phi(x, y) = \langle x, y \rangle$  (tout produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ ). On obtient la dérivée du produit scalaire de deux fonctions :  $\langle F, G \rangle' = \langle F', G \rangle + \langle F, G' \rangle$ .
- $n = m = 2, p = 1$  et  $\Phi = \det$ . On obtient la dérivée du déterminant de deux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  :  $\det(F, G)' = \det(F', G) + \det(F, G')$ .
- $n = m = p = 3$  et  $\Phi(x, y) = x \wedge y$ . On obtient la dérivée du produit vectoriel de deux fonctions :  $(F \wedge G)' = F' \wedge G + F \wedge G'$ .
- $m = p_1 = p_2 = p_3 = 3, n = 1$  et  $M = \det$ . Alors,

$$\det(F_1, F_2, F_3)' = \det(F_1', F_2, F_3) + \det(F_1, F_2', F_3) + \det(F_1, F_2, F_3').$$

3) Soient  $\mathbb{R} \supset I \xrightarrow{h} \mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$ , avec  $h$  et  $F$  dérivables. Alors,  $G = F \circ h$  est dérivable et l'on a  $G' = h' \times F' \circ h$ . Pour démontrer cette formule, on passe par les fonctions coordonnées : pour  $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ ,

$$\begin{aligned} (F \circ h)' &= (f_1 \circ h, f_2 \circ h, \dots, f_m \circ h)' = ((f_1 \circ h)', (f_2 \circ h)', \dots, (f_m \circ h)') \\ &= (h' \times f_1' \circ h, h' \times f_2' \circ h, \dots, h' \times f_m' \circ h) = h' \times (f_1' \circ h, f_2' \circ h, \dots, f_m' \circ h) = h' \times F' \circ h. \end{aligned}$$

**Théorème 1.** Dérivation aux bornes de l'intervalle Soit  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $[a, b[$ . Si  $\lim_{\substack{t \rightarrow b \\ t < b}} F(t) = L$ , alors  $F$  est dérivable à gauche en  $b$  et  $F'_g(b) = L$ . De même, si  $\lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} F(t) = L'$ , alors  $F$  est dérivable à droite en  $a$  et  $F'_d(a) = L'$ .

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer la version unidimensionnelle du théorème aux fonctions coordonnées. □

### 1.3. Dérivation d'ordre quelconque.

**Définition 2.** On définit récursivement la dérivée kème comme la dérivée de la dérivée k – 1ème, la dérivée d'ordre 0 étant la fonction elle-même. La fonction  $F: I \rightarrow \mathbb{R}^m$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si elle est k fois dérivable et si toutes ses dérivées sont continues jusqu'à l'ordre k inclusivement.

- Pour  $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ ,  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si, et seulement si,  $f_i$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $i \in [1, m]$  et l'on a alors  $F^{(k)} = (f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_m^{(k)})$ .
- Soit  $\mathbb{R} \supset I \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^p$  avec  $F$  de classe  $\mathcal{C}^k$  et  $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$  linéaire. Alors,  $G = \Phi \circ F$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et  $G^{(k)} = \Phi \circ F^{(k)}$ .
- Soit  $\mathbb{R} \supset I \xrightarrow{F, G} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^p$  avec  $F$  et  $G$  de classe  $\mathcal{C}^k$  et  $\Phi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$  une application bilinéaire. On note  $H(t) = \Phi(F(t), G(t))$ . Alors,  $H$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et l'on a

$$H^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \Phi(F^{(i)}(t), G^{(k-i)}(t)) \quad (\text{formule de Leibniz}).$$

La démonstration se fait par récurrence sur  $k$ . C'est foncièrement la même que pour la dérivée d'ordre  $n$  du produit de deux fonctions réelles de la variable réelle.

- Soient  $\mathbb{R} \supset I \xrightarrow{h} \mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$ , avec  $h$  et  $F$  de classe  $\mathcal{C}^k$ . Alors,  $F \circ h$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**Théorème 2.** Formule de Taylor-Young Soit  $\mathbb{R} \supset I \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$ . Alors, la fonction  $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  admet un développement limité à l'ordre  $k$  en  $t_0 \in \overset{\circ}{I}$  donné par

$$F(t) = \sum_{i=0}^k \frac{(t-t_0)^i}{i!} F^{(i)}(t_0) + \mathfrak{o}((t-t_0)^k) = \sum_{i=0}^k \frac{(t-t_0)^i}{i!} (f_1^{(i)}(t_0), f_2^{(i)}(t_0), \dots, f_m^{(i)}(t_0)) + \mathfrak{o}((t-t_0)^k).$$

## 2. CONTINUITÉ

On rappelle que si  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  sont des e.v.n. et  $U$ , un ouvert non vide de  $E$ ,  $f: E \supset U \rightarrow F$  est continue en  $a \in U$  si, par définition,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in U : x \in \overline{B}_E(a, \alpha) \implies f(x) \in \overline{B}_F(f(a), \varepsilon).$$

Cette définition ne dit pas comment voir en pratique que  $\|x - a\|_E \leq \varepsilon$ , la manipulation des coordonnées s'avérant peu maniable quand il y en a plusieurs à gérer. Quand  $E = \mathbb{R}^2$ , les coordonnées polaires permettent de se ramener au cas d'une seule variable, toujours considérablement plus simple. Ainsi, en considérant la norme euclidienne canonique sur  $\mathbb{R}^2$ , on a l'équivalence suivante, évidente, mais très pratique :

$$(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \overline{B}(0, r) \iff r \leq r,$$

en utilisant la convention physique que  $r = \|\overrightarrow{\text{OM}}\| \geq 0$  (si l'on utilise la convention mathématique qui permet à  $r$  de prendre des valeurs négatives, la condition devient  $|r| \leq r$ ).

En dimension 3, on peut substituer aux coordonnées polaires les coordonnées sphériques, lesquelles se généralisent assez facilement à  $\mathbb{R}^n$  (exercice).

**Définition 3.** Soient  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in U$  et  $f: U \rightarrow F$  une fonction.

- (i) On dit qu'il y a continuité partielle de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0).$$

- (ii) On dit qu'il y a continuité radiale de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  si

$$\forall \theta \in [0, 2\pi[ : \lim_{r \rightarrow 0} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) = f(x_0, y_0).$$

- (iii) Il y a continuité de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  si, et seulement si,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} |f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) - f(x_0, y_0)| = 0.$$

Il faut bien comprendre la signification géométrique de ces définitions : la continuité partielle ne considère la limite que selon les droites parallèles aux axes. On appelle *fonctions partielles* les fonctions  $x \mapsto f(x, y_0)$  et  $y \mapsto f(x_0, y)$ . La continuité radiale considère toutes les demi-droites passant par  $(x_0, y_0)$ , mais indépendamment les unes des autres. La continuité exige une *uniformité* par rapport à  $\theta$ .

Le troisième item n'est pas une définition, mais l'expression de la limite relativement à la norme euclidienne canonique sur  $\mathbb{R}^2$  car

$$\sup_{0 \leq \theta < 2\pi} \left| f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) - f(x_0, y_0) \right| = \sup_{(x,y) \in S((x_0,y_0),r)} \left| f(x, y) - f(x_0, y_0) \right|.$$

Enfin, ce n'est qu'une proposition, pas une méthode infaillible : pour trouver une limite ou prouver la continuité d'une fonction en un point, il n'est pas toujours pertinent d'utiliser les coordonnées polaires.

Il est évident que la continuité entraîne la continuité radiale, qui entraîne la continuité partielle. Les réciproques sont fausses.

**Exemple 1.** Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  par  $f(x, y, z) = \frac{x^4 + y^3 + z^4}{x^2 + y^2 + z^2}$ . En coordonnées sphériques,

$$\left| f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \right| = r \left| r \sin^4 \theta \cos^4 \varphi + \sin^3 \theta \cos^3 \varphi + r \cos^4 \theta \right| \leq r(2r + 1) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0,$$

ce qui montre que  $f$  est prolongeable par continuité en  $(0, 0, 0)$  par la valeur 0.

**Exemple 2.** Dans  $\mathbb{R}^2$ , on rappelle que  $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Si  $n \in \mathbb{N}^*$  et si  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  sont tels que  $i + j > n$ , alors

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^i y^j}{\|(x, y)\|_2^n} = 0$ . C'est immédiat en ce que la fraction est majorée en valeur absolue par  $r^{i+j-n}$ , mais important car c'est ce qui permet d'écrire des développements limités d'ordre  $n$  pour des fonctions de deux variables. L'équivalence des normes fait que  $\mathfrak{o}(\|(x, y)\|)$  ne dépend pas de la norme choisie. Cet exemple est important dans les études locales, notamment les développements limités à un ordre supérieur à 1 et pour rechercher des extrema locaux de fonctions de deux variables.

**Exemple 3.** Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$  et par  $f(0, 0) = 0$ . Montrons sa convergence radiale : si  $\sin \theta \neq 0$ , alors,

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2 \sin^2 \theta + r^4 \cos^4 \theta} \quad \therefore \quad \left| f(r \cos \theta, r \sin \theta) \right| \leq \frac{r}{\sin^2 \theta} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Si  $\sin \theta = 0$ , autrement dit, si  $y = 0$ , on a  $f(x, 0) = 0$ , qui tend bien vers 0 quand  $x$  tend vers 0. Il y a donc bien continuité radiale.

Toutefois,  $f(x, x^2) = \frac{1}{2}$  pour tout  $x \neq 0$ , donc  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

**Exemple 4.** Soient  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\Delta$  la droite d'équation  $y = x$  et  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = \frac{h(x) - h(y)}{x - y}$ . La définition de la dérivée donne  $\lim_{y \rightarrow x} f(x, y) = h'(x)$ , donc si  $f$  est prolongeable par continuité à  $\mathbb{R}^2$ , cela ne peut être qu'en posant  $f(x, x) = h'(x)$ . À ce stade, on est loin d'avoir prouvé la continuité. En rajoutant que, par symétrie, on a  $\lim_{x \rightarrow y} f(x, y) = f'(y) = f(y, y)$ , on a montré la continuité partielle. Pour conclure, il faut prouver que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (z,z)} f(x, y) = f(z, z) = h'(z)$ . De même qu'en dimension 1,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$  équivaut à  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} g(x) = \ell$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} g(x) = \ell$ , on a

$$(1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (z,z)} f(x, y) = h'(z) \iff \begin{cases} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (z,z) \\ x \neq y}} f(x, y) = h'(z) \\ \lim_{x \rightarrow z} f(x, x) = h'(z). \end{cases}$$

Pour montrer la première limite, on utilise le théorème des accroissements finis, selon lequel il existe  $c(x, y) \in ]\min(x, y), \max(x, y)[$  tel que  $f(x, y) = h'(c(x, y))$ . Comme  $\lim_{(x,y) \rightarrow (z,z)} \min(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (z,z)} \max(x, y) = z$ , le théorème des gendarmes et la continuité de  $h'$  donnent la première limite. La deuxième traduit exactement la continuité de  $h'$ . On a donc bien prolongé  $f$  en une fonction continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

Notons que l'équivalence énoncée dans (1) est plus générale et sert dès qu'une même fonction est définie par plusieurs expressions distinctes dans des régions différentes du plan. Ainsi, si  $\mathbb{R}^2 = A \uplus B$  (ce qui équivaut à  $B = A^c$ ), et si les expressions de  $f|_A$  et de  $f|_B$  sont continues, cela donne la continuité de  $f$  sur  $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ . Pour obtenir la continuité sur  $\mathbb{R}^2$ , il faut encore montrer que

$$\forall (x_0, y_0) \in \partial A = \partial B = (\mathring{A} \cup \mathring{B})^c : \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in A}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in B}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

3. FONCTIONS DE CLASSE  $\mathcal{C}^1$ 

3.1. **Dérivées partielles.** On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire canonique dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 4.** On munit  $\mathbb{R}^n$  de la base canonique  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Pour  $(a, v) \in U \times \mathbb{R}^n$ , on définit (sous réserve d'existence) la dérivée de  $f$  en  $a$  selon  $v$  la quantité

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

2. Pour  $a \in U$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on appelle dérivées partielles de  $f$  en  $a$  et l'on note

$$\partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i} f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h}.$$

3. On appelle gradient de  $f$  en  $a$  le vecteur

$$\nabla_a f = (\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), \dots, \partial_n f(a)).$$

3. La fonction  $f$  est dite de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  si ses dérivées partielles existent sur  $U$  et sont continues.

**Remarque 1.** L'opérateur  $\nabla$  se lit « nabla ».

Les dérivées partielles sont les dérivées des fonctions partielles. Ce sont donc des dérivées de fonctions d'une variable, obtenues en considérant l'autre ou les autres variables comme constantes. Il faut les comprendre comme une fonction au sens informatique du terme : pour une liste  $L$  de longueur 2, on définit une fonction  $\mathbf{f}(L) = \mathbf{f}(L[0], L[1])$  et l'on dérive l'expression obtenue par rapport à la variable  $L[0]$  ou la variable  $L[1]$ . Que l'on note ces variables  $(x, y)$  ou  $(u, v)$  n'a aucune importance et ne revêt pas, en général, de signification intrinsèque.

Il s'agit donc bien de dérivées par rapport à la première, la deuxième, la  $k$ -ème variable. Les variables étant muettes, les fonctions  $(x, y) \mapsto \partial_1 f(x, y)$  et  $(u, v) \mapsto \partial_1 f(u, v)$  sont identiques. Parfois, il est toutefois plus naturel de dériver par rapport à des variables explicitement nommées. C'est notamment le cas quand le nom des variables est investi d'une signification particulière, par exemple quand on passe des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires, ou en physique (temps, température, pression, etc).

En thermodynamique, on a l'habitude de considérer des grandeurs du type  $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$ . Ce n'est pas la même chose que si l'on définissait mathématiquement une fonction  $S = S(P, T)$  et que l'on considérerait  $\frac{\partial S}{\partial T}$ . Les dérivées partielles de la thermodynamique sont considérées relativement à un système de *variables dépendantes*, liées par une équation d'état. Alors que nous étudions ici des fonctions de *variables indépendantes*. Le cas des variables dépendantes n'est pas abordé dans le cadre du programme de mathématiques.

## 3.2. Développement limité à l'ordre 1.

**Définition 5.** Une fonction  $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , admet un développement limité à l'ordre 0 en  $(x_0, y_0) \in U$  s'il existe une constante  $b$  telle que  $f(a + h) = b + \mathbf{o}(1)$ . C'est équivalent à  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = b$ . Elle admet

un développement limité à l'ordre 1 en  $a \in U$  s'il existe  $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^n)^3$  tel que

$$f(a + h) = b + \langle c, h \rangle + \mathbf{o}(\|h\|).$$

**Proposition 1.** Soit  $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $U$  étant un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Alors, pour  $h = (h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ ,

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla_a f, h \rangle + \mathbf{o}(\|h\|) = f(a) + (\nabla_a f)^\top h + \mathbf{o}(\|h\|) = f(a) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) h_i + \mathbf{o}(\|h\|).$$

L'idée de la démonstration est d'appliquer le théorème des accroissements finis à chaque terme de la somme

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ f(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1 + h_1, \dots, a_{k-1} + h_{k-1}, a_k, \dots, a_n) \right]. \end{aligned}$$

- Proposition 2. 1.** Si  $f$  admet un développement limité à l'ordre 1, alors  $f$  admet un développement limité à l'ordre 0. Corrélativement, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^0$ .
- 2.** Si  $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en  $a$ , alors  $f$  admet des dérivées partielles d'ordre 1 en  $a$ , qui sont égales aux coefficients intervenant dans le développement limité.
- 3.** Un développement limité à l'ordre 1 est unique.

Cette proposition est facile à prouver, ce qui ne veut pas dire qu'elle ne soit d'aucune importance. Notons que  $f$  peut très bien admettre des dérivées partielles en tout point sans être continue. Considérer par exemple  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ , qui n'est pas continue à l'origine.

### 3.3. Différentielle.

**Définition 6.** Pour un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, on appelle différentielle de  $f$  au point  $a \in U$  la forme linéaire  $df_a: h \mapsto \langle \nabla_a f, h \rangle = D_h f(a)$ .

Dit comme ça, c'est un peu abstrait... En d'autres termes, en dimension 2,  $df_{(x_0, y_0)} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  est la forme linéaire qui, au couple de réels  $(h, k)$ , associe  $\partial_1 f(x_0, y_0)h + \partial_2 f(x_0, y_0)k$ . Elle s'écrit aussi comme combinaison linéaire des projecteurs canoniques :

$$df_{(x_0, y_0)} = \partial_1 f(x_0, y_0) dx + \partial_2 f(x_0, y_0) dy, \text{ où } dx(h, k) = h \text{ et } dy(h, k) = k.$$

Ce n'est pas si différent que ça de l'interprétation classique de la différentielle en physique où, à la place de l'application linéaire, on considère son action sur des accroissements infinitésimaux. Autant il faut faire attention avec les dérivées partielles relatives à une équation d'état car le calcul est vraiment différent, autant il ne s'agit avant tout ici que d'une différence de représentation mentale.

**Définition 7.** (HP) Une fonction  $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est dite différentiable en  $(x_0, y_0) \in U$  s'il existe une forme linéaire  $L \in (\mathbb{R}^n)^*$  telle que

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|).$$

La différentiabilité et l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 sont équivalentes et l'on a alors nécessairement  $b = f(a)$  et  $L(h) = \langle c, h \rangle$ . On note  $L = df_a$ , différentielle de  $f$  en  $a$  et  $b = \nabla_a f$ , gradient de  $f$  au point  $a$ . On a les implications strictes

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega \implies f$  est différentiable en tout point de  $\Omega \implies f$  admet des dérivées dans toutes les directions en tout point de  $\Omega \implies f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\Omega$ .

### 3.4. Opérations sur la différentielle et le gradient.

- $d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a$  équivaut à  $\nabla_a(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla_a f + \mu \nabla_a g$  ;
- $d(fg)_a = f dg_a + g df_a$  équivaut à  $\nabla_a(fg) = f(a)\nabla_a g + g(a)\nabla_a f$  ;
- $d\left(\frac{1}{f}\right)_a = -\frac{df_a}{f^2(a)}$  équivaut à  $\nabla_a\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\nabla_a f}{f^2}$  ;
- $d\left(\frac{f}{g}\right)_a = \frac{g df_a - f dg_a}{g^2}$  équivaut à  $\nabla_a\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \nabla_a f - f \nabla_a g}{g^2}$ .

## 4. DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR

**4.1. Définition.** Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ , on définit pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $i \neq j$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \partial_{i,j}^2 f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \partial_{i,i}^2 f.$$

De manière récursive, on définit ainsi, sous réserve d'existence, les dérivées partielles d'ordre  $k$  (i.e. celles obtenues par  $k$  dérivations partielles successives) de toute fonction définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 8.** Si  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si  $f$  admet des dérivées partielles à l'ordre  $k$  et que celles-ci sont toutes continues.

L'implication  $\mathcal{C}^1 \implies \mathcal{C}^0$  se généralise : toute fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  est de classe  $\mathcal{C}^{k'}$  pour tout  $k' \leq k$ .

**Théorème 3.** Théorème de Schwarz. Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et si  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ , alors, les dérivées partielles de  $f$  d'ordre inférieur ou égal à  $p$  ne dépendent que du nombre de fois par rapport auquel on a dérivé par rapport à chaque variable et non de l'ordre dans lequel les dérivations ont été effectuées.

Ce théorème est l'occasion de faire un peu de dénombrement. Considérons  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^p$ . Compte non tenu du théorème de Schwarz, elle admet  $n^p$  dérivées partielles d'ordre  $p$  ( $n$  choix possibles à chaque dérivation).

Si l'on tient compte du théorème de Schwarz, le nombre (maximal) de dérivées partielles distinctes est le nombre de  $n$ -uplets d'entiers naturels  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  tels que  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = p$ ,  $k_i$  étant le nombre de fois que l'on a dérivé par rapport à la  $i$ -ème variable. Un tel  $n$ -uplet est entièrement déterminé par la suite strictement croissante

$$k_1 + 1 < k_1 + k_2 + 2 < \dots < k_1 + \dots + k_{n-1} + (n-1),$$

celle-ci représentant une partie à de  $[1, p+n-1]$  de cardinal  $n-1$ . Il y en donc  $\binom{p+n-1}{n-1} = \binom{p+n-1}{p}$ . Il est facile de vérifier la validité de la formule pour  $n=2$  et  $p$  quelconque.

**4.2. Règle de la chaîne.** La règle de la chaîne explique comment calculer les dérivées d'une fonction composée.

**Proposition 3. 1.** Si  $g: \mathbb{R} \xrightarrow{(x_1, \dots, x_n)} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ , tout le monde étant de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n x'_i(t) \partial_i f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

**2.** À deux variables, si  $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$  et que tout le monde est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Le résultat s'étend à un nombre quelconque de variables.

La formulation donnant  $\frac{\partial g}{\partial u}$  est courante et succincte, mais uniquement à condition de ne pas oublier qu'elle n'est qu'une abréviation de la version complète correspondant à  $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$ . La première formule se démontre en utilisant un développement limité. En posant  $M(t) = (x(t), y(t))$  et  $g(t) = f(M(t))$ , la règle de la chaîne peut se réécrire  $g'(t) = \langle \nabla M(t) f, M'(t) \rangle$ .

**Exemple 5.** L'application de la règle de la chaîne à la relation  $f(x, y) = -f(y, -x)$  donne, en dérivant par rapport à  $x$ , la relation  $\partial_1 f(x, y) = \partial_2 f(y, -x)$ .

**Corollaire 1.** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  de différentielle nulle en tout point de  $U$  et  $(a, b) \in U^2$  tel que  $[a, b] \subset U$ . Alors,  $f(a) = f(b)$ . En particulier, si  $U$  est convexe, alors  $f$  est constante.

La démonstration consiste à poser  $g(t) = f(\gamma(t))$ , avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $\gamma(t) = (1-t)a + tb$  pour  $t \in [0, 1]$ . L'énoncé permet de passer facilement de la propriété de convexité, seule au programme, à celle de *connexité par lignes polygonales*.

**4.3. Application à la résolution d'équations aux dérivées partielles.** On distingue les *équations aux dérivées partielles*, en abrégé E.D.P., dont les inconnues sont des fonctions de plusieurs variables, des *équations différentielles ordinaires*, en abrégé E.D.O., dont les inconnues sont des fonctions d'une variable. Les méthodes générales de résolution des E.D.P. sont hors programme et l'on doit savoir, à partir d'un changement de variable en principe fourni, se ramener à une E.D.P. où ne figurent des dérivées partielles que par rapport à une seule variable.

**Exemple 6.** Les solutions de  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$  sont les fonctions de la forme  $f(x, y) = c(y)$ , où  $c$  est une fonction quelconque. Celles de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$  sont les fonctions de la forme  $f(x, y) = c(y) + d(y)x$ , où  $c$  et  $d$  sont des fonctions quelconques. Celles de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$  sont les fonctions de la forme  $f(x, y) = c(y) + d(x)$ , où  $c$  et  $d$  sont des fonctions quelconques.

**Exemple 7.** Les solutions de  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$  sont les fonctions  $f(x, y) = x^2y + c(y)$ , où  $c$  est une fonction quelconque.

**Exemple 8.** En utilisant le changement de variable  $g(u, v) = f(u, uv)$ , résoudre sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  les E.D.P.

$$(\mathcal{E}): x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \quad \& \quad (\mathcal{H}): x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

On note que l'application  $(u, v) \mapsto (u, uv)$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  sur lui-même en résolvant le système  $(u, uv) = (x, y)$ . La règle de la chaîne donne

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u, uv) + v \frac{\partial f}{\partial y}(u, uv) = \frac{1}{x} \left( x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right).$$

L'équation  $(\mathcal{E})$  est donc équivalente à  $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{u}$ , dont les solutions sont  $g(u, v) = \ln(u) + a(v)$ , ce qui donne  $f(x, y) = \ln x + a\left(\frac{y}{x}\right)$  avec  $a$  dérivable. Par exemple,  $\ln x + \arctan(y/x)$  est solution.

Une nouvelle application de la règle de la chaîne donne

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + v \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] = \frac{1}{x^2} \left[ x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right].$$

L'équation  $(\mathcal{H})$  est donc équivalente à  $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) = 0$ , qui s'intègre en  $g(u, v) = ua(v) + b(v)$ , soit finalement  $f(x, y) = ua\left(\frac{y}{x}\right) + b\left(\frac{y}{x}\right)$ .

#### 4.4. Développement limité à l'ordre 2.

**Définition 9.** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  définie sur un ouvert  $U$ . On appelle matrice hessienne de  $f$  en  $a \in U$ , la matrice  $H_f(a) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  dont le coefficient d'indice  $(i, j)$  vaut  $\partial_{i,j}^2 f(a)$ .

**Théorème 4.** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . Pour  $h = (h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + (\nabla_a f)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + \mathfrak{o}(\|h\|^2) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) h_i + \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \partial_{i,i} f(a) h_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \partial_{i,j} f(a) h_i h_j \right] + \mathfrak{o}(\|h\|^2). \end{aligned}$$

#### 4.5. Recherche d'extrema locaux.

**Définition 10.** Une fonction  $f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}$  admet un extremum local en  $a \in A$  s'il existe  $r > 0$  tel que, pour tout  $x \in A \cap B(a, r)$ ,  $f(x) - f(a)$  est de signe constant. On parle de minimum local si ce signe est positif, de maximum local s'il est négatif. Un extremum global est un extremum absolu : pour tout  $x \in A$ ,  $f(x) - f(a)$  est de signe constant.

**Proposition 4.** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Si  $f$  admet un extremum local en  $a \in U$ , alors  $df_a = 0$ . On dit que  $a$  est un point critique de  $f$ .

— Il est essentiel que  $U$  soit ouvert, ce qui est déjà le cas pour les fonctions de la variable réelle.

— Les points  $a$  tels que  $df_a = 0$  sont dits *points singuliers*. Par définition de la différentielle, ce sont ceux où  $\nabla_a f = 0_{\mathbb{R}^n}$ , donc ceux où **toutes** les dérivées partielles d'ordre 1 s'annulent.

— Pour rechercher les extrema globaux d'une fonction continue sur un fermé borné  $K$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathring{K}$ , on effectue d'abord une recherche d'extrema locaux sur  $\mathring{K}$ , puis une étude sur  $\partial K$ , que l'on décrit comme le support d'une (ou de plusieurs) arcs paramétrés, se ramenant ainsi à l'étude d'une fonction d'une variable.

**Proposition 5.** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose que  $f$  admet un point critique en  $a$ . Si  $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , alors  $f$  admet un minimum local en  $a$ . Si  $-H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , il s'agit d'un maximum local. Si ni  $H_f(a)$ , ni  $-H_f(a)$  n'appartiennent à  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , alors  $f$  n'admet pas d'extremum local en  $a$ .

La démonstration de la condition suffisante s'appuie sur le lemme algébrique suivant, qui a son intérêt en soi :

**Lemme 1.** Si  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $X \in \mathbb{R}^n$ , alors  $(\min \text{Sp}(S)) \|X\|^2 \leq X^\top S X \leq (\max \text{Sp}(S)) \|X\|^2$ .

Ce lemme admet naturellement une version en termes d'endomorphismes : si  $u$  est un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien  $(E, (\cdot | \cdot))$ , alors

$$\forall x \in E : (\min \text{Sp}(u)) \|x\|^2 \leq (u(x) | x) \leq (\max \text{Sp}(u)) \|x\|^2$$

On a même plus précisément  $\{(u(x) | x) ; x \in \mathcal{S}(0, 1)\} = [\min \text{Sp}(u), \max \text{Sp}(u)]$ .

En dimension 2, il est facile de déterminer à peu de frais si une matrice est symétrique définie positive ou négative (on dit logiquement que  $H_f$  est définie négative si  $-H_f$  est définie positive, donc si  $\text{Sp}(H_f) \subset \mathbb{R}_-^*$ ) : la matrice hessienne est définie si  $\det(H_f) > 0$ , et alors définie négative si  $\text{tr}(H_f) < 0$  (maximum) et définie positive si  $\text{tr}(H_f) > 0$  (minimum).

## 5. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

**5.1. Courbes planes.** La cinématique dit que pour une courbe plane définie par un arc paramétré  $t \mapsto M(t)$ , la tangente est dirigée par  $\frac{d\vec{M}}{dt}$  (vecteur vitesse). On étudie ici le cas des courbes définies par une équation cartésienne.

**Définition 11.** Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle courbe d'équation  $f(x, y) = 0$  l'ensemble des points  $M(x, y)$  du plan affine euclidien  $\mathcal{E}_2$  rapporté à son repère canonique tels que  $f(x, y) = 0$ .

**Exemple 9.** • Si  $(a, b) \neq (0, 0)$ ,  $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$  est une équation de la droite passant par  $M_0(x_0, y_0)$  et de vecteur normal  $a\vec{i} + b\vec{j}$ .

•  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  est l'équation du cercle de centre  $\Omega(a, b)$  et de rayon  $R$ .

• Si  $P \in \mathbb{R}[X, Y]$  avec  $\deg(P) = 2$ ,  $P(x, y) = 0$  est l'équation d'une conique (ellipse, parabole ou hyperbole), possiblement dégénérée (HP).

**Proposition 6. 1.** Si  $\mathcal{C}$  est la courbe d'équation  $f(x, y) = 0$  avec  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , et si  $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ , alors  $\overrightarrow{\nabla_{M_0} f}$  (s'il est non nul) est un vecteur normal à  $\mathcal{C}$  en  $M_0$ .

**2.** Plus généralement, si  $\mathcal{C}_\lambda$  est la courbe d'équation  $f_\lambda(x, y) = g(x, y) - \lambda = 0$  et si  $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_\lambda$ , alors  $\overrightarrow{\nabla_{M_0} g}$  est un vecteur normal à la courbe  $\mathcal{C}_\lambda$ , dirigé dans le sens des  $\lambda$  croissants.

Pour démontrer cette proposition, on note  $M_0(x_0, y_0)$  un point de  $\mathcal{C}$  et  $\vec{u}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ . Le développement limité de  $M$  à l'ordre 1 en  $(x_0, y_0)$  donne

$$(2) \quad f(M_0 + \vec{u}) \underset{(\vec{u} \rightarrow \vec{0})}{=} f(x_0, y_0) + \langle \overrightarrow{\nabla_{M_0} f}, \vec{u} \rangle + \mathfrak{o}(\|\vec{u}\|).$$

En appliquant la formule (2) à  $\vec{u} = \overrightarrow{M(t_0)M(t)}$  et  $t$  tendant vers  $t_0$ , les points  $M_0$  et  $M_0 + \vec{u} = M(t)$  appartiennent à  $\mathcal{C}$ , d'où  $f(M_0 + \vec{u}) = f(x_0, y_0) = 0$  et il vient  $\langle \overrightarrow{\nabla_{M_0} f}, \overrightarrow{M(t_0)M(t)} \rangle = \mathfrak{o}(\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\|)$ , d'où, en divisant par  $\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\|$  et en notant  $\vec{v}$  un vecteur directeur de la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M_0$ ,  $\langle \overrightarrow{\nabla_{M_0} f}, \vec{v} \rangle = 0$ , ce qui démontre la première affirmation.

Pour la deuxième, on prend  $M_0$  tel que  $f(x_0, y_0) = \lambda_0$ , donc un point situé sur la courbe  $\mathcal{C}_{\lambda_0}$ . Soit  $M_{\delta\lambda}$  le point de  $\mathcal{C}_{\lambda_0 + \delta\lambda}$  situé sur la normale à  $\mathcal{C}_{\lambda_0}$  au point  $M_0$ . On fait tendre  $\delta\lambda$  vers 0 et l'on considère que les courbes  $\mathcal{C}_{\lambda_0}$  et  $\mathcal{C}_{\lambda_0 + \delta\lambda}$  sont proches et que  $M_{\delta\lambda}$  est ainsi bien défini. La formule (2) donne alors

$$(\lambda_0 + \delta\lambda) - \lambda_0 = \delta\lambda \sim \langle \overrightarrow{\nabla_{M_0} f}, \overrightarrow{M(t_0)M_{\delta\lambda}} \rangle.$$

Comme  $\overrightarrow{\nabla_{M_0} f}$  et  $\overrightarrow{M(t_0)M_{\delta\lambda}}$  sont colinéaires, ils sont de même sens si  $\delta\lambda > 0$ , ce qui démontre la deuxième assertion de la proposition 6.

**5.2. Surfaces.** De même que pour les courbes, on peut définir une surface par une équation cartésienne.

**Définition 12.** Soit  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle surface d'équation  $f(x, y, z) = 0$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  tels que  $f(x, y, z) = 0$ .

**Exemple 10.** • Si  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ ,  $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$  est l'équation du plan passant par  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  et de vecteur normal  $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ .

•  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$  est une équation de la sphère de centre  $\Omega(a, b, c)$  et de rayon  $R$ .

•  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  est l'équation du cylindre de révolution d'axe  $(a, b, 0) + \text{Vect}(\vec{k})$  et de rayon  $R$  (non, ce n'est pas un cercle).

**Théorème et définition 1.** On dit qu'une courbe gauche est tracée sur une surface si chacun de ses points appartient à la surface. Si  $\mathcal{S}$  est une surface d'équation  $f(x, y, z) = 0$ , où  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et si  $M_0 \in \mathcal{S}$  est tel que  $\overrightarrow{\nabla_{M_0} f} \neq \vec{0}$ , l'ensemble des tangentes en  $M_0$  aux courbes tracées sur  $\mathcal{S}$  forme un plan, appelé plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $M_0$ , et c'est le plan  $M_0 + \text{Vect}(\overrightarrow{\nabla_{M_0} f})^\perp$ . Autrement dit, le gradient de  $f$  en  $M_0$  est un vecteur normal au plan tangent à la surface en ce même point.

Si l'on admet l'existence géométrique du plan tangent (comme ensemble des tangentes aux courbes tracées sur la surface en ce point), la reprise du calcul fait pour prouver la première assertion de la proposition 6 montre que  $\overrightarrow{\nabla_{M_0} f}$  est normal à toutes ces tangentes, donc que c'est bien un vecteur directeur de la normale au plan tangent.

Par ailleurs, le théorème ci-dessus permet de trouver la tangente à une courbe gauche définie comme l'intersection de deux surfaces : pour  $\mathcal{S}_i$  la surface d'équation  $f_i(x, y, z) = 0$  et  $\mathcal{C} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ , si  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}$  et si  $M_0$  est un point régulier de  $\mathcal{S}_1$  et de  $\mathcal{S}_2$ , alors la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M_0$  est la droite  $M_0 + \text{Vect}(\overrightarrow{\nabla_{M_0} f_1} \wedge \overrightarrow{\nabla_{M_0} f_2})$ .

Les équations de la forme  $z = g(x, y)$  sont dites *résolues en  $z$* . Ce sont les analogues des courbes d'équation  $y = f(x)$ . Si  $\mathcal{S}$  est une surface d'équation  $z = g(x, y)$ , on appelle *lignes de niveau* de  $\mathcal{S}$  les courbes tracées sur  $\mathcal{S}$  à altitude constante, autrement dit les courbes d'équation  $\begin{cases} g(x, y) = k \\ z = k. \end{cases}$

## 6. COMPLÉMENT : APPLICATION AU CALCUL VECTORIEL EN COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Cette section est destinée à faire manipuler la règle de la chaîne et à démontrer un certain nombre de formules du calcul vectoriel utiles en physique. Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques se fait par  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z) \rightarrow (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , où  $\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y$  et  $\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y$ ,  $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z = r \cos \theta \vec{u}_x + r \sin \theta \vec{u}_y + z\vec{u}_z$ .

Pour une fonction  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , on peut écrire  $g(r, \theta, z) = f(x, y, z) = f(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ .

**6.1. Calcul des dérivées partielles de  $g$  en fonction de celles de  $f$ .** La règle de la chaîne donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta, z) &= \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial r} \times \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta, z) + \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial r} \times \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta, z) + \frac{\partial z}{\partial r} \times \frac{\partial f}{\partial z}(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \\ &= (\cos \theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta, z) + (\sin \theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta, z) + 0, \end{aligned}$$

ce que l'on note en omettant les variables par concision sous la forme  $\frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}$ .

On obtient de même

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta, z) &= \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial \theta} \times \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta, z) + \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial \theta} \times \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta, z) + \frac{\partial z}{\partial \theta} \times \frac{\partial f}{\partial z}(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \\ &= (-r \sin \theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta, z) + (r \cos \theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta, z) + 0, \end{aligned}$$

ce que l'on note en omettant les variables par concision sous la forme  $\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}$ .

On obtient enfin facilement  $\frac{\partial g}{\partial z}(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ , ce que l'on note  $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}$ .

6.2. **Calcul des dérivées partielles de  $f$  en fonction de celles de  $g$ .** On pourrait exprimer  $r$  et  $\theta$  en fonction de  $x$  et de  $y$ , mais ce serait compliqué et nécessiterait une discussion de cas pour  $\theta$ . Il est beaucoup plus simple d'utiliser le calcul matriciel pour inverser l'expression obtenue ci-dessus.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} & 0 \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

6.3. **Calcul du gradient en coordonnées cylindriques.** Par définition, le gradient est donné en coordonnées cartésiennes par  $\frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$ . C'est pourquoi on a dû exprimer les dérivées partielles de  $f$  en fonction de celles de  $g$ . Il reste à changer de base.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}_{(x,y,z)} f &= \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z = \left( \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \vec{u}_x + \left( \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \vec{u}_y + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{u}_z \\ &= \frac{\partial g}{\partial r} (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} (-\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y) + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{u}_z = \frac{\partial g}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{u}_z. \end{aligned}$$

On peut aussi réaliser ce dernier calcul matriciellement en effectuant le changement de base de  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  à  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , dont la matrice est celle de la rotation d'axe  $(Oz)$  et d'angle  $\theta$ , dont l'inverse est donc celle de la rotation d'axe  $(Oz)$  et d'angle  $-\theta$ . Il vient

$$\overrightarrow{\text{grad}}_{\text{cyl}} f = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} & 0 \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} & 0 \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

4. *Calcul de la divergence en coordonnées cylindriques.*

Soit un champ de vecteurs  $\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z = A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_z \vec{u}_z$ . On définit  $\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ .

Le changement de base donne

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_r (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y) + A_\theta (-\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y) + A_z \vec{u}_z \\ &= (\cos \theta A_r - \sin \theta A_\theta) \vec{u}_x + (\sin \theta A_r + \cos \theta A_\theta) \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z. \end{aligned}$$

ce que l'on retrouve matriciellement par

$$(3) \quad \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}.$$

Pour calculer la divergence, on utilise le calcul de la section 2, qui exprime les opérateurs de dérivation par rapport aux coordonnées cartésiennes en fonction des opérateurs de dérivation cylindriques, soit

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \& \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

On peut alors calculer  $\text{div}(A)$  :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} &= \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\cos \theta A_r - \sin \theta A_\theta) + \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\sin \theta A_r + \cos \theta A_\theta) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \cos \theta \left[ \cos \theta \frac{\partial A_r}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right] - \frac{\sin \theta}{r} \left[ -\sin \theta A_r + \cos \theta \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \cos \theta A_\theta - \sin \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right] \\ &\quad + \sin \theta \left[ \sin \theta \frac{\partial A_r}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right] + \frac{\cos \theta}{r} \left[ \cos \theta A_r + \sin \theta \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \sin \theta A_\theta + \cos \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \frac{A_r}{r} + \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Une façon un peu différente de procéder est de noter que, si  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\vec{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors, la formule de dérivée d'un produit donne

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f\vec{A}) &= \frac{\partial(fA_x)}{\partial x} + \frac{\partial(fA_y)}{\partial y} + \frac{\partial(fA_z)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}A_x + f\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}A_y + f\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}A_z + f\frac{\partial A_z}{\partial z} = \langle \vec{\nabla}f, \vec{A} \rangle + f \operatorname{div} \vec{A}. \end{aligned}$$

On calcule maintenant la divergence des vecteurs de la base cylindrique par la méthode précédente (ce qui reste nettement plus simple que le cas général).

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u}_r &= \operatorname{div}(\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y) = \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\cos \theta) + \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\sin \theta) = \frac{1}{r}, \\ \operatorname{div} \vec{u}_\theta &= \operatorname{div}(-\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y) = \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (-\sin \theta) + \left( \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\cos \theta) = 0, \\ \operatorname{div} \vec{u}_z &= 0. \end{aligned}$$

On peut alors retrouver la formule générale en appliquant le calcul fait plus haut du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \operatorname{div}(A_r \vec{u}_r) + \operatorname{div}(A_\theta \vec{u}_\theta) + \operatorname{div}(A_z \vec{u}_z) \\ &= \langle \vec{\nabla} A_r, \vec{u}_r \rangle + \langle \vec{\nabla} A_\theta, \vec{u}_\theta \rangle + \langle \vec{\nabla} A_z, \vec{u}_z \rangle + A_r \operatorname{div} \vec{u}_r + A_\theta \operatorname{div} \vec{u}_\theta + A_z \operatorname{div} \vec{u}_z \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{A_r}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

**6.4. Calcul du laplacien en coordonnées cylindriques.** On utilise la même technique d'opérateur que pour la divergence, donc les relations (4).

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &= \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left[ \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right] + \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left[ \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\ &= \cos \theta \left[ \cos \theta \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} \right] - \frac{\sin \theta}{r} \left[ -\sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial r} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \right] \\ &\quad + \sin \theta \left[ \sin \theta \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} \right] + \frac{\cos \theta}{r} \left[ \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \right] + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Il est utile de savoir faire ces calculs car on les rencontre dans les changements de variable dans les équations aux dérivées partielles. Toutefois, dans le cadre des opérateurs classiques de l'analyse vectorielle, il est beaucoup plus simple ici d'utiliser la relation

$$\operatorname{div}(\vec{\nabla}f) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f.$$

...dans la mesure, évidemment, où l'on a déjà obtenu une expression de la divergence. On retrouve bien alors

$$\Delta f = \operatorname{div}\left(\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.$$

**6.5. Calcul du rotationnel en coordonnées cylindriques.** On part de l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes que l'on applique aux coordonnées cylindriques du champ et l'on applique à nouveau les relations (4) avant de faire un changement de base. En utilisant (3), il vient

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \\
&= \left[ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} (\sin \theta A_r + \cos \theta A_\theta) \right] \vec{u}_x + \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\cos \theta A_r - \sin \theta A_\theta) - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \vec{u}_y \\
&\quad + \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\sin \theta A_r + \cos \theta A_\theta) - \frac{\partial}{\partial y} (\cos \theta A_r - \sin \theta A_\theta) \right] \vec{u}_z \\
&= \left[ \sin \theta \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial A_r}{\partial z} - \cos \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \vec{u}_x + \left[ \cos \theta \frac{\partial A_r}{\partial z} - \sin \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial z} - \cos \theta \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \right] \vec{u}_y \\
&\quad + \left[ \cos \theta \left( \sin \theta \frac{\partial A_r}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \left( \cos \theta A_r + \sin \theta \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \sin \theta A_\theta + \cos \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \vec{u}_z \\
&\quad - \left[ \sin \theta \left( \cos \theta \frac{\partial A_r}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\cos \theta}{r} \left( -\sin \theta A_r + \cos \theta \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \cos \theta A_\theta - \sin \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \vec{u}_z \\
&= \left[ \sin \theta \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial A_r}{\partial z} - \cos \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta) \\
&\quad + \left[ \cos \theta \frac{\partial A_r}{\partial z} - \sin \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial z} - \cos \theta \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \right] (\sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta) + \left[ \frac{A_\theta}{r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_z \\
&= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z.
\end{aligned}$$

Comme pour la divergence, on peut aussi utiliser les propriétés du rotationnel et se ramener à des calculs intermédiaires plus simples que le cas général. On peut ainsi noter que, si  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\vec{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors, la formule de dérivée d'un produit donne

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}} (f \vec{A}) &= \left( \frac{\partial (f A_z)}{\partial y} - \frac{\partial (f A_y)}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial (f A_x)}{\partial z} - \frac{\partial (f A_z)}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial (f A_y)}{\partial x} - \frac{\partial (f A_x)}{\partial y} \right) \vec{u}_z \\
&= \left( f \frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} A_z - f \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} A_y \right) \vec{u}_x + \left( f \frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} A_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} A_z \right) \vec{u}_y \\
(5) \quad &\quad + \left( f \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} A_y - f \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} A_x \right) \vec{u}_z = f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \overrightarrow{\nabla} f \wedge \vec{A}.
\end{aligned}$$

On calcule alors (en n'écrivant que les dérivées non nulles)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_r &= \overrightarrow{\text{rot}} (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y + 0 \vec{u}_z) = \left[ \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\sin \theta) - \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\cos \theta) \right] \vec{u}_z = \vec{0}, \\
\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_\theta &= \overrightarrow{\text{rot}} (-\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y + 0 \vec{u}_z) = \left[ \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\cos \theta) - \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (-\sin \theta) \right] \vec{u}_z = \frac{1}{r} \vec{u}_z, \\
\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_z &= \vec{0}.
\end{aligned}$$

On peut conclure en appliquant la formule (5)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \overrightarrow{\text{rot}} (A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_z \vec{u}_z) \\
&= A_r \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_r + A_\theta \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_\theta + A_z \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_z + \left( \frac{\partial A_r}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial A_r}{\partial z} \vec{u}_z \right) \wedge \vec{u}_r \\
&\quad + \left( \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \vec{u}_z \right) \wedge \vec{u}_\theta + \left( \frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial A_z}{\partial z} \vec{u}_z \right) \wedge \vec{u}_z \\
&= \frac{A_\theta}{r} \vec{u}_z - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \vec{u}_z + \frac{\partial A_r}{\partial z} \vec{u}_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \vec{u}_z - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \vec{u}_x - \frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \vec{u}_x \\
&= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left( \frac{A_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right) \vec{u}_z.
\end{aligned}$$