

Préparation à l'oral de Centrale maths 2 — Divers

Exercice 1 (Algorithmique). On donne le programme suivant.

```
def selection(L, k):
    G, D, g, d = [], [], 0, 0
    n = len(L)
    for i in range(n):
        if L[0] > L[i]:
            G.append(L[i])
            g += 1
        elif L[0] < L[i]:
            D.append(L[i])
            d += 1
    if k <= g:
        return selection(G, k)
    elif k > n - d:
        return selection(D, k - n + d)
    else:
        return L[0]
```

1. Recopier et exécuter le programme pour une liste non triée et $k \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$ où ℓ est la longueur de la liste L. Expliquer le but et le fonctionnement du programme.

2. Donner le développement en série entière en précisant le rayon de convergence des fonctions suivantes :

$$-\ln(1-x), \frac{1}{1-x}, \frac{1}{(1-x)^2}, \frac{1}{(1-x)^3}.$$

3. On définit la suite $(c_n)_n$ par $c_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la relation de récurrence $c_n = k(n-1) + \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} c_p$. On

admet que $(c_n)_n$ majore la complexité moyenne du programme. Montrer que $c_n \leq 2kn$.

4. Avec python, tracer les points $\left(n, \frac{c_n}{n}\right)$ pour $k = 2$. Que peut-on conjecturer ?

5. On pose $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Montrer que

$$F'(x) = \frac{1}{1-x} F(x) + \frac{2kx}{(1-x)^3}.$$

En déduire une expression simple de $F(x)$.

6. Donner un développement asymptotique de c_n .

Exercice 2 (Physique). *Parabole de sécurité*. On envoie un projectile assimilé à une masse ponctuelle. Le mouvement a lieu dans le plan (xOz) . À l'instant $t = 0$, le projectile est lancé de O avec une vitesse v_0 et un angle $\alpha \in]0, \pi/2[$ avec l'horizontale (donc vers le haut...)

1. On note $(\alpha, t) \mapsto M(\alpha, t)$ la famille de ces trajectoires. Écrire la relation fondamentale de la dynamique en négligeant les forces de frottement. En déduire une paramétrisation de la trajectoire en fonction de α .

2. Tracer avec python quelques dizaines de trajectoires en faisant varier α . Que remarque-t-on ?

3. On cherche une courbe paramétrée $\mathcal{P} : \alpha \mapsto P(\alpha)$ telle qu'au point $P(\alpha)$, la courbe \mathcal{P} rencontre la trajectoire du projectile lancé avec un angle α et lui est tangente. Montrer que cela revient à chercher une fonction $\alpha \mapsto t(\alpha)$

telle que $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha}(\alpha, t(\alpha))$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial t}(\alpha, t(\alpha))$ soient colinéaires.

4. Calculer $t(\alpha)$. En déduire un paramétrage de \mathcal{P} et vérifier que \mathcal{P} est une parabole en donnant une équation cartésienne.

Exercice 3 (Normes). Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N((x, y)) = \int_0^1 |x - ty| dt$.

1. Vérifier que N définit une norme sur \mathbb{R}^2 .
2. Tracer avec python la courbe de la fonction $x \mapsto N((x, 1))$ pour $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$.
3. Calculer $N((x, 1))$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. Soit \mathcal{C} le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Tracer la courbe représentative de la fonction $g: x \mapsto N((x, \sqrt{1-x^2}))$ pour $-1 \leq x \leq 1$. Estimer $\inf N(\mathcal{C})$ et $\sup N(\mathcal{C})$ à partir du tracé.
5. Déterminer la valeur exacte de $\sup N(\mathcal{C})$.

Exercice 4 (Arithmétique). On note $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite d'entiers naturels définie par $u_0 = 9$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n^3 + 3u_n^4$. On note c_n le nombre de « 9 » terminant l'écriture décimale de u_n .

1. Écrire un programme déterminant le nombre de « 9 » terminant l'écriture décimale d'un entier k donné en argument.
2. Donner c_n pour $0 \leq n \leq 9$. Conjecturer la valeur de c_n et démontrer la conjecture.
3. Écrire un programme donnant le chiffre situé juste avant la série de « 9 » précédente et renvoyant -1 si le nombre n'est composé que de « 9 ». Appliquer ce programme à c_n pour $0 \leq n \leq 9$. Conjecturer, puis démontrer un résultat.
4. On note p_n le nombre de chiffres de c_n en base 10. Calculer $p_n 4^{-n}$ pour $n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$. Que peut-on conjecturer ? Donner un encadrement de p_{n+1} en fonction de p_n et en déduire que $4^n \leq p_n \leq \frac{4^{n+1}}{3}$, puis démontrer la conjecture.
5. Quel est l'avant-dernier chiffre précédant la série de « 9 » de u_{16} ?

Exercice 5 (Numération). Pour $x \in]0, 1[$, le *développement en série de Engel* de x est un développement en série de la forme

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \dots,$$

où les a_i forment une suite croissante (au sens large) d'entiers naturels avec $a_1 \geq 2$.

1. Justifier la convergence d'une telle série.
2. Écrire une fonction d'argument une liste finie $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ et renvoyant le réel

$$x_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \dots + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

3. Pour x donné, montrer que a_1 est l'unique entier vérifiant $\frac{1}{a_1} < x \leq \frac{1}{a_1 - 1}$.
4. Montrer que tout $x \in]0, 1[$ admet un unique développement de Engel. *Indication : on pourra réfléchir à une construction récursive de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$.*
5. Quel est le développement de Engel de 1 ?
6. Écrire une fonction **Engel(x, n)** renvoyant la liste des n premiers coefficients du développement de Engel de x .
7. Écrire une fonction d'argument (x, ε) renvoyant la liste des termes nécessaires pour que la somme partielle approche x avec une erreur majorée par ε ainsi que le calcul de cette erreur.
8. Montrer que $x \in \mathbb{Q}$ si, et seulement si, la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est stationnaire. En déduire que $\exp(1) \notin \mathbb{Q}$.

Une variante consiste à choisir b_1 tel que $\frac{1}{b_1} \leq x < \frac{1}{b_1 - 1}$ dans la représentation $x = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1 b_2} + \dots$

9. Reprendre rapidement la question 4 avec cette variante. La tester sur le début du développement de $\pi - 3$, $2/3$ et $1/2$ et comparer le résultat avec le développement précédemment étudié.
10. Quelle est la différence que l'on peut observer avec le développement de Engel standard ? Que peut-on dire du développement des nombres rationnels ? Quand les deux développements coïncident-ils ?