

Test de rentrée – PSI*, 2026 - 2027

1. Soient f, f_1, g et g_1 des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose de plus que $f \underset{+\infty}{\sim} f_1$ et que $g \underset{+\infty}{\sim} g_1$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont-elles vraies ? On n'attend aucune justification.

- a. $f \times g \underset{+\infty}{\sim} f_1 \times g_1$;
- b. $f + g \underset{+\infty}{\sim} f_1 + g_1$;
- c. si $f = o(g)$ en $+\infty$, alors $f_1 + g_1 \underset{+\infty}{\sim} g$;
- d. $f - g \underset{+\infty}{\sim} f_1 - g_1$.

2. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont-elles correctes ? On n'attend aucune justification.

- a. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^3)$ quand x tend vers 0 ;
- b. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)$ quand x tend vers 0 ;
- c. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)$ quand x tend vers 0 ;
- d. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ quand x tend vers 0 ;
- e. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ quand x tend vers 0.

3. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont-elles correctes ? Justifier brièvement la réponse.

- a. Si f est définie sur $\mathbb{R}$ et si $f(x) = \mathcal{O}(x^2)$ quand x tend vers 0, alors $f'(0) = 0$;
- b. si f est définie sur $\mathbb{R}$ et si $f(x) = \mathcal{O}(x^3)$ quand x tend vers 0, alors $f''(0) = 0$;
- c. si $\lim u_n \in \{0, +\infty\}$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$;
- d. si $\lim u_n \in \{0, +\infty\}$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\exp u_n \sim \exp v_n$.

4. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\text{a. } \forall x \in [0, \pi/2]: \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x; \quad \text{b. } \forall x \in \mathbb{R}: e^x \geq 1 + x.$$

5. Déterminer un équivalent de $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$ quand x tend vers 1. Déterminer un équivalent de $\tan x$ quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures.

6. Montrer que $\sum_{k=0}^n k! \sim n!$ quand n tend vers l'infini.

7. Déterminer $\inf_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)$ et $\sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)$.

8. Ordonner sans justification par ordre croissant au voisinage de $+\infty$ les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sqrt{x}, f_2(x) = e^{\sqrt{x}}, f_3(x) = (\ln x)^{x\sqrt{x}}, f_4(x) = e^{\sin x}, f_5(x) = e^{\sqrt{\ln x}}, f_6(x) = x^4, f_7(x) = (\ln x)^{e^x/x}.$$

9. On pose $E = \mathbb{K}_n[X]$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- a. Quelle est la dimension de E ?
- b. Pour $a \in \mathbb{K}$, justifier que $((X-a)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E . Exprimer X^n dans cette base, puis un polynôme quelconque $P \in E$.
- c. Donner une base de E dont tous les éléments sont de même degré.
- d. Montrer que tout polynôme non constant de degré impair à coefficients réels possède au moins une racine réelle.