

Test de rentrée – PSI*, 2026 - 2027, corrigé

1. Soient f, f_1, g et g_1 des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose de plus que $f \underset{+\infty}{\sim} f_1$ et que $g \underset{+\infty}{\sim} g_1$.

a. $f \times g \underset{+\infty}{\sim} f_1 \times g_1$;

Vrai. On a $\frac{f \times g}{f_1 \times g_1} = \frac{f}{f_1} \times \frac{g}{g_1} \rightarrow 1 \times 1 = 1$.

b. $f + g \underset{+\infty}{\sim} f_1 + g_1$;

Vrai (eh si). On peut sommer des équivalents tant qu'il n'y a pas de simplifications. Ici, comme les fonctions sont positives, il ne peut pas y en avoir. Formellement,

$$f + g = (f_1 + o(f_1)) + (g_1 + o(g_1)) = f_1 + g_1 + o(f_1) + o(g_1) = f_1 + g_1 + o(f_1 + g_1)$$

car $f_1 \leq f_1 + g_1$, donc un petit o de f_1 est nécessairement aussi un petit o de $f_1 + g_1$.

c. si $f = o(g)$ en $+\infty$, alors $f_1 + g_1 \underset{+\infty}{\sim} g$;

Vrai. On revient à la définition du petit o : $f \sim h \iff f = h + o(h) \iff f = h + o(h)$.

$$f_1 + g_1 = (f + o(f)) + (g + o(g)) = (o(g) + \underbrace{o(o(g))}_{o(g)}) + (g + o(g)) = g + o(g) \sim g$$

d. $f - g \underset{+\infty}{\sim} f_1 - g_1$.

Faux. En soustrayant, on perd la positivité et il peut cette fois y avoir des simplifications. Contrex :

$$\begin{aligned} f(x) = x^3 + x &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3 + x^2 = f_1(x), \quad g(x) = x^3 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3 = g_1(x) \\ f(x) - g(x) = x &\not\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 = f_1(x) - g_1(x). \end{aligned}$$

Ceux qui n'ont pas reconnu la véracité de **a** et **c** doivent reprendre (rapidement) la base. Le **a** est une propriété ultra-classique qu'on utilise tout le temps (oui, on peut multiplier et diviser les équivalents) et la **c** relève de la définition (rappelée ci-dessus).

Les items **b.** et **d.** sont piégeux : on dit souvent en première année qu'il ne faut pas additionner les équivalents. C'est une mesure de prudence, un peu comme quand on dit à un enfant qu'il ne faut pas traverser la rue. Plus grands, vous pouvez traverser même si une voiture arrive car vous êtes capable d'évaluer si vous avez le temps ou non... Pour revenir aux équivalents, on peut les additionner... quand ça ne pose pas de problème. Ainsi, si $u(x) \sim ax^2$ et $v(x) \sim bx^2$, on aura bien $u(x) + v(x) \sim (a+b)x^2$ **sauf si** $a + b = 0$. C'est pourquoi **b** est vraie et **d** est fausse. En cas de doute, revenez à la définition avec les petits o .

2.

a. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^3)$ quand x tend vers 0 **Vrai** ;

b. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)$ quand x tend vers 0 **Vrai** ;

c. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)$ quand x tend vers 0 **Vrai** ;

d. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ quand x tend vers 0 **Faux** ;

e. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ quand x tend vers 0 **Vrai**.

— Les affirmations **c** et **e** sont correctes et bienvenues : ce sont les deux écritures classiques du développement limité du logarithme népérien en 1.

— L'affirmation **a** est exacte (mais serait sanctionnée...) car le terme en x^3 , qui est faux, rentre en fait dans le $\mathcal{O}(x^3)$. Il en va de même de **b**.

— L'affirmation **d** est la seule à être mathématiquement fausse.

Certains (peu) ne connaissent pas le vrai développement limité de $\ln(1+x)$. Il faut absolument connaître par cœur les dl usuels. On s'en servira souvent, notamment dans un chapitre très important (les séries entières, où l'on fera la théorie des séries de Taylor).

Une source importante d'erreur a été la mauvais compréhension des termes de restes. C'est très important en pratique quand on fait des opérations sur les dl ou, plus généralement, dans les recherches de développements asymptotiques. Le petit o et les grand O donnent la précision de l'expression. Si, au voisinage de 0, vous écrivez $3x^2 + \mathcal{O}(x^2)$, le coefficient 3 n'a pas de sens et vous avez simplement un $\mathcal{O}(x^2)$. De manière similaire, toujours en 0, $3x^2 + \mathfrak{o}(x)$ est juste $\mathfrak{o}(x)$. C'est comme si, en physique, vous donniez une application numérique avec 5 décimales en précisant que votre résultat est vrai à 10^{-2} près.

En passant, j'insiste pour que vous privilégiez par défaut la forme en $\mathcal{O}$ pour les dl usuels, qui est plus précise et, de ce fait, plus efficace. Dans l'année, on manipulera majoritairement des $\mathcal{O}$. En quantité. Vous n'en avez pas forcément l'habitude, mais vous vous y ferez, pas de panique.

3.

- a. Si f est définie sur $\mathbb{R}$ et si $f(x) = \mathcal{O}(x^2)$ quand x tend vers 0, alors $f'(0) = 0$ **Vrai** ;
- b. si f est définie sur $\mathbb{R}$ et si $f(x) = \mathcal{O}(x^3)$ quand x tend vers 0, alors $f''(0) = 0$ **Faux** ;
- c. si $\lim u_n \in \{0, +\infty\}$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$ **Your choice** ;
- d. si $\lim u_n \in \{0, +\infty\}$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\exp u_n \sim \exp v_n$ **Faux**.

À retenir : si la fonction est continue, la dérivabilité est équivalente à l'existence d'un développement limité à l'ordre 1, ce dl étant donné par la formule de Taylor :

$$f(a+h) = f(a) + bh + \mathfrak{o}(h) \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b.$$

Cela n'est plus vrai à partir de l'ordre 2 car si l'existence des dérivées garantit l'existence du dl et le fait qu'il soit donné par la formule de Taylor, la réciproque est fausse. Ici, l'hypothèse $f(x) = \mathcal{O}(x^2)$ assure que f tend vers 0 en 0 et que f y est en particulier continue, donc l'affirmation **a** est vraie, mais pas la

b. Un contreexemple (assez) standard est $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. L'exercice 13 traite la question de manière approfondie.

Pour la **c**, j'accepte les deux réponses (si elles sont bien justifiées) : il faut en effet supposer que $\lim u_n \in \{0^+, +\infty\}$ pour que les logarithmes soient bien définis. En ce sens, c'est faux. En fait, c'est cette version positive que j'avais en tête et qui est vraie : si u_n et v_n sont deux suites strictement positives, alors

$$u_n \sim v_n \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 1 \iff \ln u_n - \ln v_n \rightarrow 0.$$

De plus, si u_n tend vers 0 ou l'infini, alors $\lim \ln u_n = \lim v_n = \pm\infty$ et $\ln u_n = \ln v_n + \mathfrak{o}(1) \sim \ln v_n$.

En revanche, c'est une erreur classique (en sup...), les équivalents ne passent pas à l'exponentielle. En effet,

$$e^{u_n} \sim e^{v_n} \iff \lim e^{u_n - v_n} = 1 \iff \lim u_n - v_n = 0.$$

Ainsi, si les suites tendent vers 0, les exponentielles sont trivialement équivalentes, mais cela n'a pas d'intérêt et si elles tendent vers l'infini, les exponentielles n'ont aucune raison d'être équivalentes. Prendre par exemple $u_n = n$ et $v_n = n + 1$.

Tous les items sont ici fondamentaux. Comme leur addition, la composition des équivalents n'est pas évidente. Elle marche quand on compose par x^α et par le logarithme (en 0 et en l'infini), pas pour l'exponentielle, il faut le savoir car ce sont des situations courantes.

Contrairement à ce que certains affirment froidement, les équivalents, les o et les $\mathcal{O}$, contrairement aux développements limités des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, ne sont pas stables par dérivation. Il est facile de comprendre pourquoi en faisant un peu de physique : pour une onde, l'ordre de grandeur de la fonction donne l'amplitude. L'ordre de grandeur de sa dérivée donne la fréquence. Aucun rapport. Pour un contreexemple, avec $f(x) = x + \sin(x^3)$, on a $f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x$ et $f'(x) = \mathcal{O}(x^2)$.

En passant, un certain nombre n'ont pas vu (ou pas tenu compte) du fait qu'à partir de la question 3, on demandait des démonstrations...

4. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\text{a. } \forall x \in [0, \pi/2]: \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x; \quad \text{b. } \forall x \in \mathbb{R}: e^x \geq 1 + x.$$

On peut bien sûr faire des études de fonction, mais c'est laid. Ce sont des inégalités de convexité.

Sur $[0, \pi/2]$, la fonction sinus est concave et donc sous sa tangente à l'origine, ce qui donne $\sin x \leq x$ et au-dessus de la corde reliant les points de la courbe d'abscisse 0 et $\pi/2$, ce qui donne $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$. Pour la majoration, on peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis, qui donne

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]: |\sin x - \sin 0| \leq \sup_{0 \leq t \leq \pi/2} |\cos t| \times |x - 0| = |x|.$$

Les deux côtés étant positifs, on peut ôter les valeurs absolues.

De manière similaire, l'exponentielle est convexe et l'inégalité exprime que la courbe est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

Même s'il y a mieux, il est quand même bon de savoir faire une étude de fonction. Pour $d(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$, on calcule $d'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$. La fonction d est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et l'on a $d'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$ et $d'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} < 0$. Posons $\alpha = \arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)$. Le tableau de variations montre que $d(x) \geq 0$ sur l'intervalle.

x	0	α	$\pi/2$
$d'(x)$		+	0
d	0		0

Cette question a été beaucoup traitée, parfois très bien, parfois moins... Il y avait deux approches, l'une par étude de fonction, l'autre par convexité. Si vous utilisez la convexité, il ne suffit pas d'écrire « la fonction est convexe, donc on a l'inégalité blablabla ». Il faut évidemment dire précisément quelle propriété des fonctions convexe (ou concave) vous utilisez. J'ai lu dans une copie « l'exponentielle est croissante et convexe, donc ». C'est un argument faux car la croissance de l'exponentielle est ici hors sujet. Il ne s'agit pas de dresser une liste de 10 propriétés, charge au correcteur de choisir la bonne, mais de cibler celle(s) qui est (sont) utile(s) à l'argument.

Pour le sinus, personne n'a fait de figure, ce qui aurait été une façon claire d'illustrer le propos. En cas d'étude de fonction, rien n'est plus clair, ni plus concis, qu'un tableau de variations contenant l'ensemble des informations pertinentes. Il est fortement conseillé d'en dresser un. Tout le monde y gagne, le candidat et le correcteur.

Utilisez un vocabulaire précis. « La fonction est supérieure à la tangente » n'a aucun sens (même si je comprends évidemment ce que vous vouliez dire). Une bonne formulation est « le graphe de la fonction est

situé au-dessus de ses tangentes ».

Une large (et étonnante) majorité de ceux qui ont choisi les études de fonction se sont arrêtés net quand il s'est agi d'étudier d . L'étude est faite ci-dessus et je n'ai pas trop de doute que vous étiez tous capables de la mener à bien en terminale (à la valeur exacte en arccosinus près) ; il n'y a donc pas trop de raison de ne pas savoir le faire maintenant.

Plusieurs sont partis du dl de sinus (ou de l'exponentielle) en 0. C'est une erreur assez répandue, donc à identifier : un dl donne une information au voisinage de 0, pas plus. Il est donc **impossible** d'en déduire une inégalité valable sur un intervalle global. Plus précisément, le dl $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ montre, par positivité du carré, que

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in [0, \alpha] : e^x \geq 1 + x,$$

mais pas du tout que l'on peut prendre $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

5. On a $\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arcsin(1) - \arcsin(x)$, mais on ne peut pas faire de dl car $\arcsin$ n'est pas dérivable en 1. Le théorème des accroissements finis ne permet pas non plus de conclure. On sait toutefois que la quantité tend vers 0. On a donc

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin x \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2} \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

On utilise en passant que $\cos(\arcsin x) > 0$ (sinon, il y aurait un $\pm$ devant la racine).

Le traitement de tangente est plus simple. On a $\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} \tan x = +\infty$. En posant $x = \frac{\pi}{2} - h$,

$$\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \frac{\cos h}{\sin h} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{h} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}.$$

Aucun succès pour cette question (deux bonnes réponses pour $\tan x$). La question sur $\arcsin$ a été posée aux Mines à l'oral en question complémentaire, ainsi qu'à CCINP.

Sur les fonctions trigonométriques inverses, il faut connaître les relations (inutiles ici)

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2} \quad \& \quad \forall x \in [-1, 1] : \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

leurs dérivées, leur graphe, savoir retrouver très vite qui de $\arcsin \circ \sin$ et de $\sin \circ \arcsin$ est l'identité. Il faut aussi connaître les formules de trigonométrie de base (duplication, addition, produit), ou être capable de les retrouver rapidement. Pour les formules du genre $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, on les retrouve en deux secondes en traçant un cercle (ou mentalement par visualisation). Les formules en $\tan(x/2)$ sont hors programme en PSI.

6. Montrer que $\sum_{k=0}^n k! \sim n!$ quand n tend vers l'infini.

La factorielle croît tellement rapidement que la somme est équivalente à son dernier terme. Isoler le dernier terme ne suffit pas ; on sort les deux derniers :

$$n! \leq \sum_{k=0}^n k! = n! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k! \leq n! + (n-1)! + (n-1)(n-2)! = n! + 2(n-1)! \sim n!.$$

Une seule bonne réponse. Quand le nombre de termes tend vers l'infini, leur somme ne tend pas nécessairement vers 0, quand bien même chaque terme tend vers 0. C'est une forme indéterminée $\infty \times 0$. C'est une erreur qui n'est pas scandaleuse sur un test de rentrée, mais mieux vaut ne pas la refaire plus tard... Pour vous en souvenir, pensez aux sommes de Riemann. Si le raisonnement s'appliquait, toutes les intégrales seraient nulles ! En effet, pour f bornée sur $[a, b]$,

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket : \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

7. L'inégalité de Cauchy-Schwarz relative au produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ donne

$$n^2 = \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k} \times \frac{1}{\sqrt{x_k}} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right).$$

Il y a par ailleurs égalité si tous les x_k sont égaux. On a donc

$$\inf_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) = \min_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) = n^2.$$

On pouvait aussi faire sans Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_k} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i}{x_j} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \frac{x_j}{x_i} = n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i}{x_j} f\left(\frac{x_i}{x_j}\right) \quad \text{où} \quad f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

La fonction f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on calcule $f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}$, qui est donc du signe de $t^2 - 1$. On en déduit le tableau de variations

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$		-	0 +
f	$+\infty$	$\searrow$	$2 \nearrow +\infty$

Il s'ensuit

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2 = n + 2 \binom{n}{2} = n^2$$

avec égalité quand tous les x_i sont égaux et l'on retrouve bien le résultat.

Pour la borne supérieure, posons $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 1$ et $x_n = x$. Alors,

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) = (n-1+x) \left(n-1 + \frac{1}{x} \right) \underset{x>0}{\underset{x \rightarrow 0}{\sim}} \frac{n-1}{x} \rightarrow +\infty \quad \therefore$$

$$\sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) = +\infty.$$

J'ai fait finalement l'inf et le sup... Une proportion intéressante a pensé à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, mais une minorité l'a bien écrite. Si vous utilisez cette inégalité, soit $\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$, il faut préciser de quel produit scalaire et de quel espace vous parlez.

Formellement, l'inégalité de CS donne ici une majoration de la borne inférieure. Si vous voulez prouver que c'est bien n^2 , il faut arguer de la deuxième partie de CS, à savoir les cas d'égalité. Cauchy-Schwarz (égalité, cas d'égalité et démonstration) est à connaître absolument. On s'en sert régulièrement et c'est une question de cours qui tombe assez souvent à l'oral.

Deux copies sont parties sur le développement du produit, sans parvenir à aller au bout. Ce n'était pas une mauvaise idée et j'ai complété ci-dessus leur argument.

8. On pose

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = e^{\sqrt{x}}, \quad f_3(x) = (\ln x)^{x\sqrt{x}}, \quad f_4(x) = e^{\sin x}, \quad f_5(x) = e^{\sqrt{\ln x}}, \quad f_6(x) = x^4, \quad f_7(x) = (\ln x)^{e^x/x}.$$

Certaines des fonctions sont faciles à ordonner. En notant $f \ll g$ pour $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(g(x))$ et $f \gg g$ pour $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(f(x))$, on a $f_1 \ll f_6$, $f_5 \ll f_2$ et $f_3 \ll f_7$. Par ailleurs, $f_4 = \mathcal{O}(1)$ alors que toutes les autres fonctions tendent vers l'infini, donc c'est la plus petite. Montrons que

$$f_4 \ll f_5 \ll f_1 \ll f_6 \ll f_3 \ll f_2 \ll f_7.$$

Pour y voir plus clair, c'est une règle technique de base, on passe à l'exponentielle

$$\begin{aligned} \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{\sqrt{x}} &= \exp \left[\underbrace{\sqrt{\ln x} - \frac{\ln x}{2}}_{\rightarrow -\infty} \right] \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \therefore \quad f_5 \ll f_1; \\ \frac{(\ln x)^{x\sqrt{x}}}{x^4} &= \exp \left[\underbrace{x\sqrt{x} \ln \ln x - 4 \ln x}_{\rightarrow +\infty} \right] \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \therefore \quad f_6 \ll f_3; \\ \frac{e^{\sqrt{x}}}{(\ln x)^{x\sqrt{x}}} &= \exp \left[\underbrace{\sqrt{x} - x^{3/2} \ln \ln x}_{\rightarrow -\infty} \right] \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \therefore \quad f_3 \ll f_2; \\ f_7(x) &= \exp \left[\frac{e^x \ln \ln x}{x} \right] \quad \& \quad \frac{e^x \ln \ln x}{x} \gg \frac{e^x}{x} \gg e^{x/2} \gg \sqrt{x} \quad \therefore \quad f_2 \ll f_7. \end{aligned}$$

Aucune réponse entièrement correcte, ce qui n'est pas grave. C'était long et un peu compliqué. Assurez-vous que vous êtes capable 1) d'identifier les comparaisons « évidentes » et 2) de pouvoir, en prenant deux des fonctions, déterminer qui est un petit o de qui (calculs ci-dessus).

9. On pose $E = \mathbb{K}_n[X]$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

a. On a $\dim E = n + 1$.

b. Pour $a \in \mathbb{K}$, la famille $((X - a)^k)_{0 \leq k \leq n}$ comporte $n + 1$ vecteurs. Pour montrer qu'elle constitue une base de E , il suffit de montrer qu'elle est libre, ce qui est le cas, puisqu'elle est échelonnée en degré, ou de montrer qu'elle est génératrice, ce qu'assure la formule de Taylor pour les polynômes.

La formule du binôme de Newton donne

$$X^n = ((X - a) + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} (X - a)^k.$$

En sommant, il vient

$$P = \sum_{m=0}^n b_m X^m = \sum_{m=0}^n b_m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k} (X - a)^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{m=k}^n b_m \binom{m}{k} a^{m-k} \right) (X - a)^k.$$

Une excellente alternative consiste à utiliser la formule de Taylor pour les polynômes, soit

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

En particulier pour $P = X^n$, on calcule $P^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$ et l'on retrouve bien la formule obtenue avec le binôme.

c. Pour donner une base de E dont tous les éléments sont de même degré, on prend des polynômes échelonnés en valuation. Si $\deg(P_k) = k$ et si P_k est unitaire, la matrice de passage de la base canonique de E à $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est triangulaire supérieure à diagonale unitaire, donc inversible et cela (cours de sup) montre bien que l'on a une base. En prenant des polynômes $Q_k = X^k(1 + X^{n-k})$, on obtient une matrice de passage triangulaire inférieure à diagonale unitaire, donc également inversible.

Une autre idée est de prendre les polynômes de Lagrange : pour $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ des réels, la famille de polynômes $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ définie par $L_i = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$: d'après le cours, mais on ne

le demandait pas de le refaire ici, c'est l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ par l'isomorphisme défini sur E par $\Phi(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$, dont tous les éléments sont manifestement de degré n .

d. Sans perte de généralité, on peut supposer le polynôme P unitaire. Pour montrer que tout polynôme non constant de degré impair à coefficients réels possède au moins une racine réelle, on peut passer par l'analyse et le théorème des valeurs intermédiaires en notant que $\lim_{-\infty} P = -\infty$ et $\lim_{+\infty} P = +\infty$. Une deuxième possibilité consiste à utiliser la factorisation complexe : les racines non réelles d'un polynôme réel étant deux à deux conjuguées, il ne peut, avec multiplicité, y en avoir qu'un nombre pair, ce qui laisse de la place pour au moins une racine réelle.

Question beaucoup traitée, parfois très bien. Une seule erreur sur la dimension (un étourderie). Là encore, l'exercice est la base de la base. Le corrigé étendu ci dessus propose plusieurs approches glanées sur les copies, toutes à connaître. On reviendra sur les polynômes de Lagrange. Si vous ne vous en souvenez pas, ce n'est donc pas important à ce stade de l'année.

Comme dans la question 4, attention au vocabulaire algébrique. La notion de dimension est **strictement réservée** aux espaces vectoriels. Une matrice n'a donc pas de dimension, mais une taille et une famille de vecteurs, un cardinal.