

Problème I

Dans tout le problème, $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, f_1 et f_2 sont deux fonctions définies sur $[a, b]$, continues et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour $i \in \{1, 2\}$, on note m_i le minimum de f_i et M_i son maximum.

Q 1. Justifier l'existence de m_i et de M_i et qu'ils sont strictement positifs.

Q 2. Justifier sans calcul que $\left(\int_a^b f_1(t)f_2(t) dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f_1(t)^2 dt\right) \left(\int_a^b f_2(t)^2 dt\right)$ et rappeler dans quel cas il y a égalité. Dans la suite, on pose

$$h = \left(f_2 - \frac{M_2}{m_1}f_1\right) \left(f_2 - \frac{m_2}{M_1}f_1\right) \quad \& \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}: F_\lambda = \lambda^2 f_1^2 - \lambda \left(\sqrt{\frac{M_1 M_2}{m_1 m_2}} + \sqrt{\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}}\right) f_1 f_2 + f_2^2.$$

Q 3. Montrer que la fonction h est négative.

Q 4. Montrer qu'il existe un réel λ_0 tel que $F_{\lambda_0} = h$.

Q 5. Montrer que

$$\left(\sqrt{\frac{M_1 M_2}{m_1 m_2}} + \sqrt{\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}}\right)^2 \left(\int_a^b f_1(t)f_2(t) dt\right)^2 \geq 4 \left(\int_a^b f_1(t)^2 dt\right) \left(\int_a^b f_2(t)^2 dt\right).$$

Q 6. Montrer que l'inégalité de la question 5 est une égalité si, et seulement si, les fonctions f_1 et f_2 sont constantes.

Problème 2

Partie I – Sommes de Riemann d'intégrales généralisées

Dans tout le problème, pour deux réels $a < b$, on note $\mathcal{D}_{a,b}$ l'ensemble des fonctions $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continues, intégrables sur $]a, b[$ et telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Q 7. Soient $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $g = f|_{]a,b[}$. Montrer que $g \in \mathcal{D}_{a,b}$ (on commencera par énoncer, sans démonstration, mais avec précision, le théorème de convergences des sommes de Riemann vu en première année).

Q 8. Dans cette question, on définit les suites $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ par

$$\forall k \geq 1: a_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{2^{k+1}} \quad \& \quad b_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{2^{k+1}}.$$

a. Montrer qu'il existe un entier k_0 tel que $b_{k+1} < a_k$ pour tout $k \in \llbracket k_0, +\infty \rrbracket$.

b. En déduire que la fonction $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} k^2 \cdot 2^{k+1}(t - a_k) & \text{si } \exists k \geq k_0 \text{ tel que } t \in \left[a_k, a_k + \frac{1}{2^{k+1}}\right], \\ k^2 \cdot 2^{k+1}(b_k - t) & \text{si } \exists k \geq k_0 \text{ tel que } t \in \left[a_k + \frac{1}{2^{k+1}}, b_k\right], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est bien définie, continue sur $]0, 1[$, intégrable sur $]0, 1[$ et que $f \notin \mathcal{D}_{0,1}$.

Q 9. Montrer que si $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue, monotone et intégrable sur $]a, b[$, alors f appartient à $\mathcal{D}_{a,b}$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur $]a, b[$, que $f|_{]a,c]}$ est décroissante et que $f|_{]c,b]}$ est croissante, où $c = \frac{a+b}{2}$.

Q 10. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{2n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Q 11. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n} f\left(a + k \frac{b-a}{2n+1}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Q 12. Montrer que $f \in \mathcal{D}_{a,b}$.

Partie II – Application à une fonction particulière

Q 13. Montrer que la fonction h définie sur $]0, 1[$ par $h(t) = \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ appartient à $\mathcal{D}_{0,1}$.

Q 14. Montrer que $\int_0^1 h(t) dt = \pi$.

Q 15. Montrer qu'il existe une constante λ que l'on précisera telle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda \sqrt{n}$.

Q 16. En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}$.

Q 17. On considère une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels strictement supérieurs à -1 de limite nulle.

a. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} = 0$.

b. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \left(\frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} - 1 \right) = 0.$$

Partie III – Deuxième application

Soient $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$, $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$ et $K = \int_0^{\pi} \ln(\sin x) dx$.

Q 18. Montrer la convergence de I .

Q 19. Montrer que J et K convergent et que $I = J = K/2$.

Q 20. Exprimer de deux manières différentes $I+J$ en fonction de K . En déduire la valeur des trois intégrales.

Q 21. Rappeler la factorisation dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^n - 1$. En l'utilisant, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Q 22. En utilisant la partie I, retrouver la valeur de I .

Partie IV – Étude d’une marche aléatoire (cette partie ne fait pas partie du DMS)

Dans cette partie, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n: \Omega \longrightarrow \{-1, 1\})_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans l’ensemble à deux éléments $\{-1, 1\}$, ces variables aléatoires étant mutuellement indépendantes et centrées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Q 23. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\frac{1+X_n}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Dans la suite, on fixe l’entier $n \geq 1$. On appelle *chemin* tout $2n$ -uplet $\gamma = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n})$ dont les composantes ε_k valent -1 ou 1 . Si $\gamma = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n})$ est un chemin, on appelle *indice d’égalité* tout entier $b \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ tel que $\sum_{i=1}^b \varepsilon_i = 0$.

On remarquera alors qu’un entier k est un indice d’égalité si, et seulement si, le k -uplet $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ comporte autant de composantes égales à 1 que de composantes égales à -1 .

On note $N_n: \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ la variable aléatoire qui à tout élément ω de l’univers Ω compte le nombre d’indices d’égalité du chemin $(X_1(\omega), \dots, X_{2n}(\omega))$.

On note pour tout entier i entre 1 et n , l’événement A_i défini par

$$A_i = \{\omega; 2i \text{ est un indice d’égalité de } (X_1(\omega), \dots, X_{2n}(\omega))\}.$$

Q 24. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(A_i)$ pour tout entier i entre 1 et n .

Q 25. Soient $\ell \in \mathbb{Z}$ un entier et $n \geq 1$ un autre entier. En distinguant le cas où l’entier $\ell - n$ est pair ou impair, calculer $\mathbb{P}(S_n = \ell)$.

On admet sans démonstration le résultat suivant :

Théorème 1 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels non nuls telles que $a_n = o(b_n)$ au voisinage de $+\infty$ et la série $\sum_n |b_n|$ est divergente. Alors :

$$\sum_{k=1}^n a_k = o\left(\sum_{k=1}^n |b_k|\right) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

Q 26. Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels strictement positifs telles que : $c_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} d_n$ et la série $\sum_n c_n$ diverge.

En utilisant le résultat admis dans l’énoncé, montrer que la série $\sum_n d_n$ est divergente et que :

$$\sum_{k=1}^n c_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n d_k.$$

Q 27. Montrer que la variable aléatoire N_n est d’espérance finie et que $\mathbb{E}(N_n) = \sum_{i=1}^n 4^{-i} \binom{2i}{i}$.

Q 28. En déduire que $\mathbb{E}(N_n)_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}$.

Dans une urne contenant n boules blanches et n boules noires, on procède à des tirages de boules sans remise, jusqu’à vider complètement l’urne. Les tirages sont équiprobables à chaque pioche.

Pour tout entier k entre 1 et $2n$, on dit que l'entier k est un indice d'égalité si, dans l'expérience de pioche précédemment décrite, il reste autant de boules noires que de boules blanches dans l'urne après avoir pioché les k premières boules sans remise. On remarque que l'entier $2n$ est toujours un indice d'égalité.

On note M_n , la variable aléatoire comptant le nombre aléatoire d'indices d'égalité k entre 1 et $2n$.

Q 29. Montrer que la variable M_n admet une espérance finie égale à :

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{2i}{i} \cdot \binom{2n-2i}{n-i}}{\binom{2n}{n}}.$$

Q 30. En déduire l'équivalent $\mathbb{E}(M_n)_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\pi n}$.