

DMS 1 – PSI*, 2026 – 2027, corrigé

Problème I, d'après ENS, B/L, 2006

Dans tout le problème, $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, f_1 et f_2 sont deux fonctions définies sur $[a, b]$, continues, et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On note m_i le minimum de f_i et M_i son maximum.

Q 1. Les fonctions f_i étant continues sur le segment $[a, b]$, l'existence de m_i et de M_i est assurée par le théorème des bornes atteintes. Comme ce sont des valeurs prises par f_i , elles sont strictement positives par hypothèse.

Q 2. L'inégalité $\left(\int_a^b f_1(t)f_2(t) dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f_1^2(t) dt\right) \left(\int_a^b f_2^2(t) dt\right)$ est l'inégalité de Cauchy-Schwarz relative au produit scalaire $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$ sur l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $[a, b]$. On sait qu'il y a égalité si, et seulement si, les fonctions sont proportionnelles.

Dans la suite, on pose

$$h = \left(f_2 - \frac{M_2}{m_1} f_1\right) \left(f_2 - \frac{m_2}{M_1} f_1\right) \quad \& \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}: F_\lambda = \lambda^2 f_1^2 - \lambda \left(\sqrt{\frac{M_1 M_2}{m_1 m_2}} + \sqrt{\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}}\right) f_1 f_2 + f_2^2.$$

Q 3. Pour $x \in [a, b]$, en utilisant que multiplier une inégalité par une constante positive (resp. négative) la conserve (resp. en change le sens), il vient

$$\begin{aligned} \left(f_2 - \frac{M_2}{m_1} f_1\right)(x) &= f_2(x) - \frac{M_2}{m_1} f_1(x) \leq M_2 - \frac{M_2}{m_1} m_1 = 0 \quad \& \\ \left(f_2 - \frac{m_2}{M_1} f_1\right)(x) &= f_2(x) - \frac{m_2}{M_1} f_1(x) \geq m_2 - \frac{m_2}{M_1} M_1 = 0. \end{aligned}$$

La fonction h est ainsi le produit de deux fonctions de signes opposés, donc négative.

Q 4. On développe le produit définissant h , ce qui donne

$$h = \left(f_2 - \frac{M_2}{m_1} f_1\right) \left(f_2 - \frac{m_2}{M_1} f_1\right) = \frac{m_2 M_2}{m_1 M_1} f_1^2 - \left(\frac{M_2}{m_1} + \frac{m_2}{M_1}\right) f_1 f_2 + f_2^2.$$

Posons $\lambda_0 = \sqrt{\frac{m_2 M_2}{m_1 M_1}}$. Il est clair que les termes en f_1^2 et f_2^2 de F_{λ_0} et de h sont identiques. C'est aussi le cas du terme en $f_1 f_2$ car

$$\lambda_0 \left(\sqrt{\frac{M_1 M_2}{m_1 m_2}} + \sqrt{\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}}\right) = \sqrt{\frac{m_2 M_1 M_2^2}{m_1^2 m_2 M_1}} + \sqrt{\frac{m_1 m_2^2 M_2}{m_1 M_1^2 M_2}} = \frac{M_2}{m_1} + \frac{m_2}{M_1},$$

tous les nombres considérés étant positifs (les racines sont bien définies) strictement (les quotients aussi). On a donc bien $F_{\lambda_0} = h$.

Q 5. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, posons

$$I(\lambda) = \int_a^b F_\lambda(t) dt = \lambda^2 \int_a^b f_1(t)^2 dt - \lambda \left(\sqrt{\frac{M_1 M_2}{m_1 m_2}} + \sqrt{\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}}\right) \int_a^b f_1(t)f_2(t) dt + \int_a^b f_2(t)^2 dt.$$

La question Q 4 donne $I(\lambda_0) = \int_a^b h(t) dt \leq 0$ d'après la question Q 3. Par ailleurs, f_1 étant non nulle, on a $\int_a^b f_1^2(t) dt > 0$ et, corrélativement, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda) = +\infty$. La fonction I étant polynomiale de degré 2

à valeurs réelles, elle est continue et le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'elle s'annule sur $\mathbb{R}$. Ainsi, son discriminant est positif, soit

$$\left(\sqrt{\frac{M_1 M_2}{m_1 m_2}} + \sqrt{\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}} \right)^2 \left(\int_a^b f_1(t) f_2(t) dt \right)^2 \geq 4 \left(\int_a^b f_1(t)^2 dt \right) \left(\int_a^b f_2(t)^2 dt \right).$$

Q6. Supposons qu'il y ait égalité dans l'inégalité ci-dessus. Alors, le trinôme du second degré I admet une racine double et ne prend que des valeurs positives. En particulier, $I(\lambda_0)$ ne peut être strictement négatif, donc $I(\lambda_0) = 0$. Comme h est de signe constant, cela entraîne que h est la fonction nulle. La fonction $\frac{f_2}{f_1}$ prend donc ses valeurs dans l'ensemble $\left\{ \frac{M_2}{m_1}, \frac{m_2}{M_1} \right\}$. Cette fonction étant continue, elle est donc constante par le théorème des valeurs intermédiaires. Si $\frac{f_2}{f_1} = \frac{M_2}{m_1}$, comme $f_2(x) \leq M_2$ et $f_1(x) \geq m_1$, cela entraîne que $f_2 = M_2$ et $f_1 = m_1$, donc que f_1 et f_2 sont constantes. L'égalité $\frac{f_2}{f_1} = \frac{m_2}{M_1}$ se traite de manière similaire ou en appliquant le premier cas aux inverses de f_1 et de f_2 .

Réciproquement, si $f_1 = c_1$ et $f_2 = c_2$ sont constantes, les deux termes de l'inégalité valent $4(b-a)^2 c_1^2 c_2^2$ et il y a donc égalité.

Problème II, d'après Mines-Ponts, PSI, 2024

Partie I – Sommes de Riemann d'intégrales généralisées

$$\mathcal{D}_{a,b} = \left\{ f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R}) \text{ intégrable ; } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right\}.$$

Q7. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Sa restriction g à $]a, b[$ est alors évidemment continue et prolongeable par continuité en a et en b , donc $\int_a^b g$ est faussement généralisée, convergente et numériquement égale à $\int_a^b f$. Le théorème de convergence des sommes de Riemann stipule que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt.$$

En notant $S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ la somme de Riemann d'ordre n de f associée aux rectangles à gauche,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} g\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = S_n(f) - \frac{f(a)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt - 0 = \int_a^b g(t) dt.$$

Q8. a. On a $a_k - b_{k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2^{k+2}} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{3}{2^{k+2}} \sim \frac{1}{k^2} > 0$ à partir d'un certain rang par croissances comparées. Il n'est pas très difficile (ce n'était pas demandé) de trouver le *certain rang* en question : on note $u_k = \frac{1}{k(k+1)}$ et $v_k = \frac{3}{2^{k+2}}$ et l'on calcule $\frac{u_3}{v_3} = \frac{8}{9} < 1$, $\frac{u_4}{v_4} = \frac{16}{15} > 1$ et $\frac{u_{k+1}}{v_{k+1}} \div \frac{u_k}{v_k} = \frac{2k}{k+2} \geq 1$ pour tout $k \geq 2$. Ainsi, la suite $\left(\frac{u_k}{v_k}\right)_{k \geq 2}$ est croissante et $\frac{u_4}{v_4} > 1$, donc $k_0 = 4$ convient et l'on a, pour tout $k > k_0$,

$$\cdots < a_{k+1} < b_{k+1} < a_k < b_k < a_{k-1} < b_{k-1} < \cdots < a_{k_0+1} < b_{k_0+1} < a_{k_0} < b_{k_0}.$$

b. • Montrons que f est bien définie. En notant pour $k \geq k_0$

$$I_k = \left[a_k, a_k + \frac{1}{2^{k+1}} \right] = \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{k} \right] \quad \& \quad J_k = \left[a_k + \frac{1}{2^{k+1}}, b_k \right] = \left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k} + \frac{1}{2^{k+1}} \right],$$

On note que $I_k \cap J_k = \left\{ \frac{1}{k} \right\}$ et que les deux définitions de f en $\frac{1}{k}$ coïncident et donnent $f\left(\frac{1}{k}\right) = k^2$.

De plus, la question 8.a montre que, pour tout $k \geq k_0$, $\max J_{k+1} = b_{k+1} < a_k = \min I_k$. Les intervalles se suivent donc sous la forme $I_{k+1} \prec J_{k+1} \prec I_k \prec J_k$, où $I \prec J$ signifie $\sup I \leq \inf J$ et la seule superposition est l'intersection de I_k et de J_k , dont a vu qu'elle ne posait pas de problème. Il n'y a donc pas de conflit définitionnel et f est bien définie.

• La continuité est évidente en tout point qui n'est pas une extrémité d'un des intervalles I_k ou J_k , puisque la restriction de f à un voisinage d'un tel point est affine (nulle en un point n'appartenant pas à l'un des intervalles). On a déjà vu que f est continue en $\max I_k = \min J_k$, puisqu'elle y est continue à droite et à gauche comme fonction affine et que ces limites sont égales ainsi que l'a montré le calcul de $f\left(\frac{1}{k}\right)$.

• La formule donnant l'aire d'un triangle et le fait que la restriction de f aux intervalles $[b_{k+1}, a_k]$ soit nulle pour $k \geq k_0$ donnent, pour tout $k \geq k_0$,

$$\int_{a_k}^{b_k} f(t) dt = k^2 \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{k^2}{2^{k+1}} \quad \& \quad \int_{b_{k+1}}^{a_k} f(t) dt = 0 \quad \therefore \quad \int_{a_k}^{b_{k_0}} f(t) dt = \sum_{m=k_0}^k \frac{m^2}{2^{m+1}},$$

par la relation de Chasles. Si l'on fait tendre k vers l'infini, la série converge clairement par exemple par croissances comparées, son terme général étant négligeable devant $\frac{1}{m^2}$ ou a^m pour $\frac{1}{2} < a < 1$.

Par décroissance de la fonction $x \mapsto \int_x^{b_{k_0}} f(t) dt$ et $\lim a_k = 0$, il s'ensuit que l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^{b_{k_0}} f(t) dt$ converge et que l'on a $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{m=k_0}^{\infty} \frac{k^2}{2^{k+1}}$.

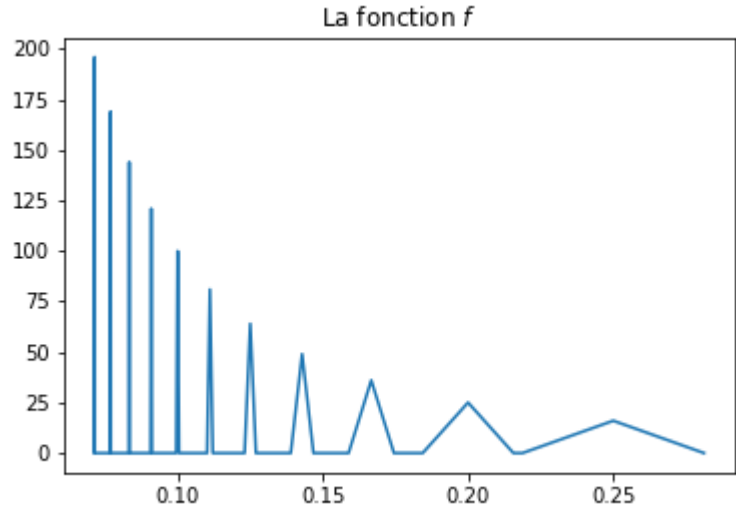
• Enfin, $f \notin \mathcal{D}_{0,1}$ car la suite des sommes de Riemann diverge : la fonction f étant positive, on peut minorer la somme de Riemann par son premier terme, soit

$$\forall n \geq k_0 : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
X, Y = [], []
for k in range(4, 15):
    c = 1/k
    X.append(c + 1/2**(k+1))
    Y.append(0)
    X.append(c)
    Y.append(k*k)
    X.append(c - 1/2**(k+1))
    Y.append(0)

X.reverse()
Y.reverse()
plt.figure()
plt.plot(X, Y)
plt.title("La fonction $f$")
plt.savefig("Mines-2024-fig1.png")
plt.show()
```



Q 9. Posons $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$. Ainsi, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Supposons que f est croissante et que $\int_a^b f$ converge. L'encadrement classique série-intégrale donne

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt \underset{(1 \leq k \leq n)}{\leq} \frac{b-a}{n} f(x_k) \underset{(0 \leq k \leq n-1)}{\leq} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt \quad \therefore$$

$$\int_a^b f(t) dt \xleftarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_{n-1}} f(t) dt \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \leq \int_{x_1}^b f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt,$$

les passages à la limite étant donnés par la définition de la convergence de l'intégrale impropre. Par linéarité de l'intégrale, le cas où f est décroissante s'obtient en appliquant le cas croissant à $-f$.

Q 10. On découpe la somme en trois en isolant le terme en $k = n$ et l'on effectue le changement d'indice $j = k - n$ dans la deuxième somme. Les convergences sont obtenues en application de la question 9, les fonctions $f_{|a,c]}$ et $f_{[c,b[}$ étant intégrables et monotones.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{2n}\right) &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{2n}\right) + \frac{1}{2n} f(c) + \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{c-a}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} f\left(c + j \frac{b-c}{n}\right) \right] + \frac{f(c)}{2n} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c-a} \int_a^c f(t) dt + \frac{1}{b-c} \int_c^b f(t) dt \right] + 0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt. \end{aligned}$$

Q 11. On découpe la somme en deux.

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n} f\left(a + k \frac{b-a}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{2n+1}\right) + \frac{1}{2n+1} \sum_{k=n+1}^{2n} f\left(a + k \frac{b-a}{2n+1}\right),$$

et l'on note $S_n^{(1)}$ la première somme et $S_n^{(2)}$ la deuxième. Comme $f_{|a,c]}$ est décroissante, on a

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} &\leq \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{2n+1}\right) = \frac{n+1}{2n+1} \times \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{c-a}{n+1}\right) \\ &\geq \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{c-a}{n}\right) + \frac{f(c)}{n} \right] \end{aligned}$$

D'après la question 9, le minorant et la majorant ci-dessus tendent vers la même limite $\int_a^c f(t) dt$. L'encadrement de $S_n^{(2)}$ s'obtient en échangeant le sens des inégalités, minorant et majorant convergeant vers $\int_c^b f(t) dt$. Le théorème des gendarmes et la relation de Chasles permettent de conclure.

Q 12. Les sommes de Riemann tant d'ordre pair (Q 10) qu'impair (Q 11) convergent vers la valeur moyenne de la fonction. Celle-ci appartient donc à $\mathcal{D}_{a,b}$.

Partie II – Application à une fonction particulière

Q 13. Posons $u(t) = t(1 - t)$. Alors, $u'(t) = 1 - 2t$ est positive si, et seulement si, $t \leq 1/2$, donc u est croissante sur $[0, 1/2]$, puis décroissante sur $[1/2, 1]$. La fonction h s'écrit $h = \psi \circ u$ avec $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Or, ψ est décroissante, donc $h|_{[0, 1/2]}$ est décroissante et $h|_{[1/2, 1]}$ est croissante. La fonction h est par ailleurs continue sur $]0, 1[$ comme composée de fonctions continues. Enfin,

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \stackrel{(u=1-t)}{=} \int_1^{1/2} \frac{-du}{\sqrt{(1-u)u}} = \int_{1/2}^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}},$$

ce qui signifie que les deux intégrales sont de même nature. Or, l'équivalent $\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ montre par

comparaison que $\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ converge. Comme h est positive, cela montre son intégrabilité. Ainsi, h vérifie les hypothèses des questions 10 à 12 et appartient à $\mathcal{D}_{0,1}$.

Q 14. On calcule $t(1 - t) = \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1 - (2t - 1)^2}{4}$, d'où le changement de variable $u = 2t - 1$, qui donne

$$\int_0^1 h(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = [\arcsin u]_{-1}^1 = \pi.$$

D'autres changements de variable sont possibles, comme $u = t^2$ ou $u = \sin^2 t$.

Q 15. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ étant décroissante, la question se traite classiquement par une comparaison série-intégrale :

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} &\underset{(k \geq 1)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{(k \geq 2)}{\leq} \int_{k-1}^k \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ 2\sqrt{n+1} - 1 &= \int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{\sqrt{t}} = 1 + \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n} \end{aligned}$$

Or, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ par exemple par les accroissements finis, donc $2\sqrt{n+1} - 1 \sim 2\sqrt{n}$, d'où

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}, \text{ soit } \lambda = 2.$$

Toutefois, il est ici plus rapide d'appliquer la question 9 à la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{-1/2} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{n} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{n} [2\sqrt{t}]_{t \rightarrow 0}^1 = 2\sqrt{n}.$$

Q 16. On n'utilise pas la question ci-dessus, mais les deux questions qui la précèdent.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} h\left(\frac{i}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\text{Q 13})} \int_0^1 h(t) dt \stackrel{(\text{Q 14})}{=} \pi.$$

Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite de réels appartenant à $] -1, +\infty[$ et de limite nulle.

Q 17. a. Comme $(\varepsilon_n)_n$ est de limite nulle, elle est bornée et admet donc une norme infinie $\|\varepsilon\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varepsilon_n|$.

Par ailleurs, l'étude de monotonie faite à la question Q 13 assure que

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket : \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} = \frac{1}{n} h\left(\frac{i}{n}\right) \leq \frac{1}{n} h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n-1}}.$$

Alors, pour $1 < m < n$,

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} \leq \sum_{i=1}^m \frac{\|\varepsilon\|_\infty}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=m+1}^{n-1} \frac{\max_{m < i < n} |\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} \leq \frac{m\|\varepsilon\|_\infty}{\sqrt{n-1}} + \max_{m < i < n} |\varepsilon_i| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}.$$

Pour $m = m(n)$ une fonction de limite infinie négligeable par rapport à $\sqrt{n}$ (par exemple $m(n) = \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$ ou $m(n) = \lfloor \ln(n) \rfloor$), la question Q 16 et le théorème des gendarmes assurent que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} = 0$.

b. On réduit l'expression entre crochet au même dénominateur, puis on utilise l'inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \left[\frac{(1 + \varepsilon_i)(1 + \varepsilon_{n-i})}{1 + \varepsilon_n} - 1 \right] \right| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_{n-i}|}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i \varepsilon_{n-i}|}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_n|}{\sqrt{i(n-i)}};$$

Dans un deuxième temps, on montre que les quatre sommes sont de limite nulle.

- Le changement de variable $j = n - i$ montre que les deux premières sommes sont égales et la question précédente, qu'elles tendent vers 0.
- La troisième somme est de limite nulle comme le montre la question a appliquée à la majoration

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i \varepsilon_{n-i}|}{\sqrt{i(n-i)}} \leq \|\varepsilon\|_\infty \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}}.$$

— Enfin,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_n|}{\sqrt{i(n-i)}} = |\varepsilon_n| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \sim \pi |\varepsilon_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Partie III – Deuxième application (oral Centrale)

Q 18. La fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est continue sur $]0, \pi/2]$ et $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ entraîne $\ln(\sin x) \underset{x > 0}{\sim} \ln x$. Or,

$\int_0^1 \ln x \, dx$ est une intégrale de référence convergente, d'où la convergence de I .

Q 19. Un changement de variable bijectif de classe $\mathcal{C}^1$ ne modifie pas la nature d'une intégrale et assure l'égalité numérique des intégrales en cas de convergence. Ainsi,

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) \, dx \underset{(u=\pi/2-x)}{=} \int_{\pi/2}^0 \ln(\sin(\pi/2 - u))(-du) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos u) \, du = J$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) \, dx \underset{(u=\pi-x)}{=} \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u) \, du \quad \therefore \quad K = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin x) \, dx = 2I.$$

Q 20. On calcule

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\pi/2} [\ln(\sin x) + \ln(\cos x)] \, dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x \cos x) \, dx = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2} \sin(2x)\right) \, dx \\ &= -\frac{\pi \ln 2}{2} + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x)) \, dx \underset{(u=2x)}{=} -\frac{\pi \ln 2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin u) \, du = \frac{K}{2} - \frac{\pi \ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la question Q 19 donne $I + J = K$, d'où $K = -\pi \ln 2$ et $I = J = -\frac{\pi \ln 2}{2}$.

Q 21. Soit n un entier naturel au moins égal à 2. Alors, la théorie des racines de l'unité donne

$$X^n - 1 = \prod_{k=1}^n (X - e^{2ik\pi/n}) \quad \therefore \quad \sum_{k=0}^{n-1} X^k = \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n})$$

en divisant par $X - 1$. En évaluant cette dernière identité polynomiale en 1, il vient, en utilisant, pour simplifier le calcul, que $n \in \mathbb{R}_+$, d'où $|n| = n$,

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{2ik\pi/n}) = \prod_{k=1}^{n-1} |e^{-ik\pi/n} - e^{ik\pi/n}| = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Q 22. On peut appliquer la question 9 à I car la fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est croissante sur $]0, \pi/2]$ comme composée de deux fonctions croissantes sur cet intervalle. On a déjà prouvé par ailleurs la convergence de l'intégrale. Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt \stackrel{(Q\ 9)}{\underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow}} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) = \frac{\pi}{2n} \ln\left[\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right] \\ &\stackrel{(Q\ 21)}{=} \frac{\pi}{2n} \ln\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right) = \frac{\pi \ln n}{2n} - \frac{\pi(n-1) \ln 2}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{\pi \ln 2}{2}. \end{aligned}$$

IV. Une étude de marche aléatoire

Q 23. Par hypothèse, $X_n(\Omega) \subset \{-1, 1\}$. Si $\mathbf{P}(X_n = 1) = p$, alors $\mathbf{E}(X_n) = p - (1 - p) = 2p - 1 = 0$, puisque X_n est centrée. Ainsi, $p = \frac{1}{2}$ et $X_n \sim \mathcal{U}(\{-1, 1\})$, donc $\frac{X_n + 1}{2} \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Q 24. Notons $U_n = \#\{i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket ; X_i = 1\}$. Par définition de la loi binomiale, $U_n \sim \mathcal{B}(2n, 1/2)$ et

$$\mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(U_i = i) = \binom{2i}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i} = \frac{1}{4^i} \binom{2i}{i}.$$

Q 25. Par définition, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est une somme de n nombres impairs, donc de même parité que n . Ainsi,

$\mathbf{P}(S_n = \ell) = 0$ pour tout ℓ de parité inverse de celle de n , donc si $\ell - n$ est impair. Posons $Y_i = \frac{X_i + 1}{2}$

et $S'_n = \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{S_n + n}{2} \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$ d'après la question Q 24. Si $\ell - n$ est pair,

$$\mathbf{P}(S_n = \ell) = \mathbf{P}\left(S'_n = \frac{\ell + n}{2}\right) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{\ell + n}{2}}.$$

Q 26. Posons $r_n = c_n - d_n$. Par hypothèse, $c_n \sim d_n$, donc $r_n = o(c_n)$. En vertu du théorème admis,

$$\sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n d_k + \sum_{k=1}^n r_k = \sum_{k=1}^n d_k + o\left(\sum_{k=1}^n c_k\right),$$

ce qui est équivalent à $\sum_{k=1}^n c_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=1}^n d_k$.

Q 27. Par définition, N_n compte le nombre d'indices $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que A_i soit réalisé. Autrement dit, $N_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(N_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) \stackrel{(Q\ 24)}{=} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i} \binom{2i}{i}.$$

Q 28. D'après la formule de Stirling,

$$\frac{1}{4^i} \binom{2i}{i} \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4^i} \left(\frac{2i}{e}\right)^{2i} \left(\frac{e}{i}\right)^{2i} \times \frac{\sqrt{4\pi i}}{2\pi i} = \frac{1}{\sqrt{\pi i}}.$$

En appliquant les deux questions précédentes, il vient

$$\mathbf{E}(N_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \stackrel{(\text{Q } 15)}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}.$$

Q 29. Introduisons les événements B_i : « l'entier i est un indice d'égalité ». Pour calculer $\mathbf{P}(B_i)$, on commence par noter que $\mathbf{P}(B_i) = 0$ pour tout i impair. On a aussi $\mathbf{P}(B_{2n}) = 1$ comme mentionné dans l'énoncé. Pour calculer $\mathbf{P}(B_{2i})$, il suffit de s'intéresser aux indices ayant amené au tirage d'une boule blanche, ce qui donne $\binom{2n}{n}$ possibilités distinctes. Parmi ces possibilités, les cas favorables correspondent

aux tirages tels qu'en $2i$ tirages, on ait tiré exactement i boules blanches, soit $\binom{2i}{i}$ possibilités pour les i premiers tirages, complétées par les $\binom{2n-2i}{n-i}$ possibilités pour les tirages restant à effectuer, soit

$$\text{finalement, comme } M_n = \sum_{i=1}^{2n} \mathbb{1}_{B_i} = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{B_{2i}},$$

$$\mathbf{E}(M_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(B_{2i}) = \binom{2n}{n}^{-1} \sum_{i=1}^n \binom{2i}{i} \binom{2n-2i}{n-i}.$$

Q 30. On a montré à la question Q 28 que $\binom{2k}{k} \sim \frac{4^k}{\sqrt{\pi k}}$. On peut donc écrire $\binom{2k}{k} = \frac{4^k}{\sqrt{\pi k}}(1 + \varepsilon_k)$ avec $\lim \varepsilon_k = 0$ et $\varepsilon_k > -1$, les coefficients binomiaux étant positifs. En reportant dans l'expression de $\mathbf{E}(M_n)$, il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(M_n) &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{4^i}{\sqrt{\pi i}} \times \frac{4^{n-i}}{\sqrt{\pi(n-i)}} \times \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} \times \frac{(1 + \varepsilon_i)(1 + \varepsilon_{n-i})}{1 + \varepsilon_n} = 1 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{(1 + \varepsilon_i)(1 + \varepsilon_{n-i})}{1 + \varepsilon_n} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \left[\frac{(1 + \varepsilon_i)(1 + \varepsilon_{n-i})}{1 + \varepsilon_n} - 1 \right] = 1 + \sqrt{\pi n} + \mathfrak{o}(\sqrt{n}) \sim \sqrt{\pi n} \end{aligned}$$

en vertu des questions Q 16 et Q 17b.