

PSI* – Problème d’entraînement – Calcul approché de l’intégrale d’une fonction continue sur un segment

Partie I – Sommes de Darboux (partie abstraite)

Pour $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et une subdivision $\sigma: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, on appelle *somme de Darboux* une somme du type

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k) \quad \text{où} \quad \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket: x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}.$$

On note $\mathfrak{S}_{[a,b]}$ l’ensemble des subdivisions de $[a, b]$ et l’on appelle *diamètre de la subdivision* $\sigma \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$ la quantité $\delta(\sigma) = \max_{0 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k)$. On dit que σ est régulière si $x_{k+1} - x_k$ ne dépend pas de k , ce qui revient à dire que $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

1. En se ramenant aux sommes de Riemann classiques, montrer que, si f est lipschitzienne et si les subdivisions sont régulières, alors les sommes de Darboux tendent vers l’intégrale de f sur $[a, b]$ quand n tend vers l’infini.

2. On dit que f est *uniformément continue* sur I si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2: |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On admet (théorème de Heine vu en MPSI) que toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

a. Montrer que toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

b. Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$ et non uniformément continue et un exemple de fonction uniformément continue sur $[0, 1]$ non lipschitzienne.

c. Étendre le résultat de convergence des sommes de Darboux aux fonctions continues et aux subdivisions quelconques quand le diamètre de la subdivision tend vers 0. Formellement,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}:$$

$$\left[\delta(\sigma) \leq \alpha \implies \forall (\xi_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in \prod_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}]: \left| \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \varepsilon \right].$$

Partie II – Méthode des trapèzes (partie plus simple)

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Soit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ la subdivision régulière de l’intervalle $[a, b]$ en n intervalles. On approche f sur l’intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par la fonction affine g_i coïncidant avec f en x_i et en x_{i+1} . On définit g comme étant la fonction définie sur $[a, b]$ dont, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la restriction à $[x_i, x_{i+1}]$ est g_i .

3. Calculer $\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(t) dt$. En déduire $\int_a^b g(t) dt$. L’approximation de $\int_a^b f(t) dt$ par $\int_a^b g(t) dt$ s’appelle *méthode des trapèzes*. Pourquoi?

4. On suppose que $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$.

a. On pose

$$M_2 = \sup_{a \leq t \leq b} |f''(t)| \quad \text{et} \quad \Delta_i(x) = \int_{x_i}^x f(t) dt - (x - x_i) \frac{f(x) + f(x_i)}{2}.$$

Calculer $\Delta'_i(x)$, puis majorer $|\Delta'_i(x)|$ en fonction (notamment) de M_2 .

b. En déduire une majoration de $|\Delta_i(x_{i+1})|$, puis de

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b g(t) dt \right|.$$

Pour quelles fonctions l’approximation donne-t-elle un résultat exact?

5. Comparer le terme d’erreur de la méthode des trapèzes avec celui de la méthode dite *du point milieu* : la fonction g est remplacée par une fonction h en escalier prenant la valeur $f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$ sur l’intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.