

Problème 1

Dans tout le problème, on considère une fonction $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, décroissante et de limite nulle en l'infini. Pour $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, on considère les intégrales impropres

$$I(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \quad \& \quad J(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) |\sin(\omega t)| dt.$$

On note $a = \frac{\pi}{\omega}$ la période de $t \mapsto |\sin(\omega t)|$. L'objectif du problème est d'établir, sous certaines hypothèses sur f , la convergence de ces intégrales et de calculer leur limite quand ω tend vers $+\infty$ ou, ce qui est équivalent, quand a tend vers 0 par valeurs supérieures.

Partie 1 — Étude d'un exemple

Dans cette partie, on pose $f(t) = e^{-t}$.

Q 1. Justifier que les intégrales $I(\omega)$ et $J(\omega)$ sont convergentes pour tout $\omega > 0$.

Q 2. Calculer $I(\omega)$ et déterminer $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} I(\omega)$.

Q 3. Montrer que

$$J(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-na} \int_0^a e^{-t} \sin(\omega t) dt.$$

Q 4. En déduire que $J(\omega) = \frac{\omega(1 + e^{-a})}{(1 + \omega^2)(1 - e^{-a})}$ et déterminer $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} J(\omega)$.

Partie 2 — Étude de J quand f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

On suppose dans cette partie que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Q 5. Justifier la convergence de $J(\omega)$ pour tout $\omega > 0$.

Q 6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'encadrement

$$\int_0^{n+1} f(at) dt \leq \sum_{k=0}^n f(ka) \leq f(0) + \int_0^n f(at) dt.$$

En déduire la convergence de la série $\sum f(na)$, puis que, si f n'est pas la fonction nulle,

$$S(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f(na) \underset{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}}{\sim} \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Q 7. Montrer que

$$J(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a f(t + na) \sin(\omega t) dt.$$

Q 8. Montrer l'encadrement

$$\frac{2}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} f(na) \leq J(\omega) \leq \frac{2}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} f(na).$$

En déduire l'existence de $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} J(\omega)$ et sa valeur en fonction de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Partie 3 — Étude de I quand f est de classe $\mathcal{C}^1$

Dans cette partie, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Q 9. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t) \cos(\omega t) dt$ converge absolument pour tout $\omega > 0$.

Q 10. En déduire que l'intégrale $I(\omega)$ converge pour tout $\omega > 0$. Déterminer sa limite quand ω tend vers $+\infty$.

Partie 4 — Étude de I dans le cas général

Le but de cette partie est d'étendre les résultats de la partie 3 quand f est seulement supposée continue. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^a f(t + na) \sin(\omega t) dt.$$

Q 11. Montrer la convergence de la série $\sum (-1)^n u_n$.

Q 12. Montrer que $I(\omega)$ converge et que $I(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$.

Q 13. Montrer que $I(\omega)$ est positive et déterminer $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} I(\omega)$.

Problème 2

Le but de ce problème est d'établir, dans le cas particulier d'une fraction rationnelle, une célèbre formule d'intégration complexe (théorie de Cauchy), dite *formule des résidus* et de l'appliquer à un calcul d'intégrale. On rappelle que la fonction *signe* est définie par $\operatorname{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$, $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$ et $\operatorname{sgn}(0) = 0$ et, à toutes fins utiles, que la fonction logarithme est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et pas ailleurs...

Q 14. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

a) Montrer que $t \mapsto \frac{1}{t-z}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$, mais que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{dt}{t-z} = i\pi \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(z))$.

b) Montrer que pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t-z)^m} = 0$.

Dans les deux questions suivantes, on considère P et Q , deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ avec $Q = \prod_{\ell=1}^k (X - z_\ell)^{n_\ell}$ non constant à racines dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $\deg(P) < \deg(Q)$; la fraction est irréductible, ce qui signifie que $P(z_\ell) \neq 0$ pour tout $\ell \in \llbracket 0, k \rrbracket$. On admet qu'il existe une *décomposition en éléments simples* unique de la fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ et qu'elle est de la forme $F = \sum_{\ell=1}^k \sum_{s=1}^{n_\ell} \frac{a_{\ell,s}}{(X - z_\ell)^s}$ où les coefficients $a_{\ell,s}$ appartiennent à $\mathbb{C}$. Pour $\ell \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on note $\operatorname{Res}_{z_\ell}(F) = a_{\ell,1}$ le *résidu de F en z_ℓ* .

Q 15 (Formule des résidus). On suppose que $\deg(P) \leq \deg(Q) - 2$ et qu'en outre, $z_\ell \notin \mathbb{R}$ pour $\ell \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Montrer que $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt = i\pi \sum_{\ell=1}^k \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(z_\ell)) \operatorname{Res}_{z_\ell}(F).$$

Q 16. Montrer que si z_ℓ est une racine simple de Q , alors $\operatorname{Res}_{z_\ell}(F) = \frac{P(z_\ell)}{Q'(z_\ell)}$.

Q 17. En utilisant la formule des résidus, calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$.

Q 18. Dédurre de la question précédente la convergence et la valeur de $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt$.

Q 19. Dans cette dernière question, on calcule $I_{p,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^p}{1+t^{2n}}$.

a) Pour quels couples $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ l'intégrale est-elle convergente ? Que vaut alors $I_{p,n}$ si p est impair ?

b) Exprimer les racines de $X^{2n} + 1$ sous forme exponentielle.

c) Montrer que, sous les hypothèses de convergence définies en Q 19 a, $I_{2p,n} = \pi \left[n \sin \left(\frac{(2p+1)\pi}{2n} \right) \right]^{-1}$.

Problème 3

On rappelle que tout entier naturel se décompose de manière unique en une somme de puissances de 2 deux à deux distinctes, soit $n = \sum_{k=0}^{s-1} 2^{n_k}$ avec $n_0 < n_1 < \dots < n_{s-1}$. Cela correspond au développement en base 2 utilisé en informatique. Par exemple $13 = 8 + 4 + 1 = 2^3 + 2^2 + 2^0$, s'écrit **1101**. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $s_2(n)$ le nombre de puissances utilisées par ce développement, qui est donc aussi la somme des chiffres de l'écriture de n en base 2. On a ainsi $s_2(13) = 3$. On convient raisonnablement que $s_2(0) = 0$ (somme vide).

Q 20. Écrire 38 en base 2 et vérifier que $s_2(38) = 3$.

Q 21. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $s_2(2n)$ et $s_2(2n+1)$ en fonction de $s_2(n)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On définit $A_k = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ s_2(n)=k}} \frac{1}{n}$.

Q 22. Calculer A_1 .

Q 23. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, déterminer $\#\{n \in \llbracket 2^p, 2^{p+1} \rrbracket ; s_2(n) = k\}$. En déduire que la série A_k converge.

Q 24. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite positive. Montrer que $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum u_{2n}$ et $\sum u_{2n+1}$ convergent et qu'en cas de convergence, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n+1}$.

Q 25. En utilisant les questions précédentes, montrer que, pour tout $k \geq 2$, $A_k = A_{k-1} + B_k$ avec

$$B_k = -2 \sum_{\substack{n \geq 1 \\ s_2(n)=k-1}} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Q 26. Calculer $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$.