

Commentaires sur le DS 2bis

Barème des notes figurant sur les copies : Pb I-1 (8), Pb I-2 (9), Pb I-2&3 (10,5), Pb II (18), Pb III (13).
Moyenne = médiane = 11,1, mini = 3, maxi = 19,3.

• Le premier point sur lequel je veux revenir est la convergence des intégrales. Dans un nombre inacceptable de copies (pas toutes dans les dernières au classement), cette question à la base de la base est rédigée n'importe comment. Reprenons :

- On veut prouver la convergence de $\int_a^b f(t) dt$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On doit commencer par écrire que la fonction intégrée est continue ou continue par morceaux sur l'un des quatre intervalles $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$. Les points où l'intervalle est ouvert sont **exclusivement** les points à étudier.
- En Q1, on n'écrit donc pas que l'intégrande est continue en 0, puisqu'on a déjà écrit qu'elle est continue sur $[0, +\infty[$. Cette affirmation en 0 ne se substitue pas non plus à la phrase d'introduction sur l'intervalle de continuité car il pourrait y avoir un problème quelque part sur $]a, b[$.
- Si nécessaire, on en profite pour justifier que la fonction est bien définie sur l'intervalle. Ce n'est pas utile dans le premier problème car c'est évident, ça le devient dans le deuxième où le fait que $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est nécessaire pour intégrer $t \mapsto \frac{1}{t-z}$, le dénominateur ne s'annulant alors pas.
- Une intégrale est dite *faussement généralisée* en une borne finie si l'intégrande n'est pas définie en ce point mais y est prolongeable par continuité. Il n'y a **pas** d'intégrale faussement généralisée en une borne infinie. Aucune des intégrales du premier problème n'était faussement généralisée. Je rappelle que le fait d'avoir une limite nulle en l'infini n'est ni nécessaire, ni suffisant pour faire converger l'intégrale en une borne infinie, mais que l'existence d'une limite non nulle montre sa divergence.
- Les intégrales de référence doivent être connues. Il est ainsi mathématiquement correct, mais ridicule, de convoquer $1/t^2$ pour I ou J (problème 1).
- Personne ou presque n'a vu qu'à la première question, il suffisait de montrer que J était convergente, puis d'invoquer le fait que la convergence absolue entraîne la convergence.
- En une borne problématique, on utilise le plus souvent les comparaisons (dans le problème 1, on pouvait aussi simplement majorer). Je rappelle que, si l'on majore, il est indispensable d'utiliser les valeurs absolues (ou les modules). La majoration (correcte) $\sin(\omega t)e^{-t} \leq e^{-t}$ ne prouve rien du tout : on a aussi $-1 \leq e^{-t} \dots$ En revanche, $\sin(\omega t)e^{-t} \leq e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-t})$ est une bonne formulation. Les comparaisons ($\mathcal{O}$, $\mathfrak{o}$, $\sim$, éventuellement Θ) sont des propriétés **locales**. On doit toujours préciser le point considéré (ci-dessus, $t \rightarrow +\infty$).
- Pour une intégrale ou une série, il arrive que l'on utilise *existe* ou *bien définie* à la place de *convergente*. Ne pas se laisser surprendre.
- Dans la même veine, il est fondamental de distinguer « $\int_0^n f(t) dt$ converge » et « $\int_0^n f(t) dt$ admet une limite finie quand $n \rightarrow \infty$ ». Dans le premier cas, il s'agit de la convergence de l'intégrale (triviale dans le DS car toutes les fonctions étaient continues). Dans le second, il s'agit de la convergence de la suite. J'ai lu plusieurs fois la première phrase en soupçonnant que le (la) coupable avait la seconde en tête.
- Le théorème de comparaison pour les intégrales compare les **fonctions** et en déduit l'intégrabilité de la fonction majorée d'une manière ou d'une autre. Si la comparaison est de la forme $|f(t)| \leq g(t)$, on peut en déduire une inégalité sur ces intégrales (à condition qu'elles convergent). Il est **totalemt interdit** d'écrire des inégalités portant sur des intégrales **avant** d'en avoir montré la convergence. Ainsi, l'inégalité

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} |\sin(\omega t)| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

est vraie, mais ce n'est pas elle qui peut donner, en tout cas dans le cadre du programme de PSI, la convergence de $J(\omega)$. C'est une erreur qui sera toujours sanctionnée car, au vu du programme, elle procède d'une erreur logique. Pour pouvoir écrire une telle inégalité et en déduire la convergence, il faudrait disposer d'une théorie de l'intégration des fonctions positives à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Dans ce cadre théorique, on peut faire la différence entre $\int_0^{+\infty} \sin t \, dt$, qui est vraiment divergente, et $\int_0^{+\infty} t^2 \, dt$, qui a bien un sens et prend la valeur $+\infty$. C'est ce que fait le programme de MP, mais pas celui de PSI. Attention, donc, si vous travaillez avec des MP/MPI, ou aux corrigés issus de ces classes. Ce qu'ils font est pertinent *dans le cadre de la théorie qu'ils ont étudiée*, mais n'a aucun sens en PC/PSI.

- Tout cela marche de manière similaire avec les séries : on compare les suites u_n et v_n , puis, après qu'on a montré la convergence (absolue) des séries correspondantes, on peut écrire des inégalités sur leurs sommes. Attention, $\sum u_n \leq \sum v_n$ n'a jamais de sens car, en l'absence de bornes, ces séries n'ont pas de valeur numérique. C'est comme si l'on écrivait $\int f(x) \, dx \leq \int g(x) \, dx$, qui n'a pas plus de sens. La notation $\int f(x) \, dx$ est parfois utilisée pour désigner l'ensemble des primitives de f ; c'est ainsi un ensemble de fonctions, toutes égales à une constante additive près, mais il est absurde, ce choix de constante n'étant pas fait, de les comparer par des inégalités. Si vous avez l'esprit de contradiction vous pourriez objecter que l'on pourrait par exemple écrire $\int \sin x \, dx \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathbf{o} \left(\int e^x \, dx \right)$, puisque c'est vrai quelque constante que l'on rajoute, mais on ne le fait pas.
- Bref, dans cette classe, je devrais avoir 48 bonnes réponses aux questions Q1 et Q5 et toute la classe devrait avoir assimilé les points ci-dessus. Cela n'a pas été le cas.

- Toujours sur la convergence des intégrales, mais beaucoup plus subtil (bien compris dans 2 ou 3 copies). À plusieurs reprises (Q3, Q7, Q12), on s'intéressait à des égalités du genre

$$\int_0^{+\infty} f(t) \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{na}^{(n+1)a} f(t) \, dt.$$

J'ai repris et développé le corrigé de Q3, qui méritait plus de détails. En fait, l'égalité ci-dessus n'est pas une simple application de la relation de Chasles et peut même être fausse. Un contreexemple très simple et qu'il est pertinent d'avoir en tête est $\int_0^{+\infty} \sin(2\pi t) \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \sin(2\pi t) \, dt$. Le terme de droite est parfaitement défini et vaut 0 (la série est nulle), mais l'intégrale de gauche diverge. Il n'y a pas de résultat clairement au programme sur le sujet. C'est pourquoi il faut avoir compris ce qui marche (et ce qui ne marche pas) et refaire au coup par coup les démonstrations sur les copies. En revanche, après avoir bien détaillé Q3, on pouvait se permettre de balancer un peu Q7, qui en est le copier/coller en disant que c'était le même argument. Certains en ont usé. À bon escient.

- *Premier cas simple : f est positive* (plus généralement, de signe constant sur $[x, +\infty[$, mais cela se ramène facilement au cas positif). C'est simple parce que $x \mapsto \int_0^x f(t) \, dt$ et $N \mapsto \sum_{n=0}^N \int_{na}^{(n+1)a} f(t) \, dt$ sont croissantes et qu'elles admettent donc des limites en l'infini, ces limites appartenant à $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, posons $e(x) = \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$. Par définition de la partie entière, $e(x)a \leq x < (e(x) + 1)a$, d'où

$$\int_0^{e(x)a} f(t) \, dt \stackrel{(\text{Chasles})}{=} \sum_{n=0}^{e(x)-1} \int_{na}^{(n+1)a} f(t) \, dt \leq \int_0^x f(t) \, dt \leq \sum_{n=0}^{e(x)} \int_{na}^{(n+1)a} f(t) \, dt \stackrel{(\text{Chasles})}{=} \int_0^{(e(x)+1)a} f(t) \, dt.$$

Le théorème des gendarmes assure que les limites sont les mêmes dans $\overline{\mathbb{R}}_+$: l'intégrale converge si, et seulement si, la série converge et, en cas de convergence, il y a égalité numérique.

- *Deuxième cas simple : $\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$ est convergente*. Par composition des limites, la suite des sommes partielles admet une limite finie, qui est la même que celle de $x \mapsto \int_0^x f(t) \, dt$, d'où la convergence de la série et l'égalité

numérique.

- *Cas délicat : la série converge et on ignore la nature de l'intégrale.* C'est compliqué parce que l'intégrale peut diverger et converger (pas les deux à la fois...) C'était ce qui se passait en Q12. Le fait que cela puisse être compliqué entraîne que même les cas simples méritent un minimum d'explication (Q3). Pour montrer la convergence de l'intégrale, il faut regarder ce qui se passe entre na et $(n+1)a$. Formellement, il faut montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [na, (n+1)a]} \left| \int_{na}^x f(t) dt \right| = 0.$$

En pratique, f est presque toujours intégrable, on l'on montre que $\int_{na}^{(n+1)a} |f(t)| dt$, qui majore le sup ci-dessus, tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Notons qu'au vu du deuxième cas simple, si l'intégrale converge, alors il y a égalité numérique. Il est donc impossible que la série et l'intégrale prennent des valeurs numériques finies distinctes.

- La question Q6 a posé beaucoup de problèmes. Très peu l'ont entièrement bien traitée.

- Tout le monde a vu qu'il y avait de la comparaison série-intégrale là-dessous. Je rappelle que l'on ne se rue pas sur un encadrement de sommes partielles, mais que l'on commence par encadrer le terme général de la série, avant de le sommer. Il y avait deux façons naturelles d'encadrer $f(ka)$:

$$\int_k^{k+1} f(at) dt \leq f(ka) \leq \int_{k-1}^k f(at) dt \quad \text{ou} \quad \frac{1}{a} \int_{ka}^{(k+1)a} f(t) dt \leq f(ka) \leq \frac{1}{a} \int_{(k-1)a}^{ka} f(t) dt.$$

La première utilise que la décroissance de f entraîne celle de $t \mapsto f(at)$ (jamais lu cette prudente justification, mais non sanctionné). On peut aussi obtenir cet encadrement en intégrant l'inégalité $f(at) \leq f(kt)$ pour tout $t \in [k-1, k]$. La deuxième uniquement la décroissance de f et la méthode des rectangles (citée avec à propos dans plusieurs copies).

- Beaucoup ne pensent pas à préciser les valeurs de k pour lesquelles l'encadrement est valable. Le plus efficace était de noter ici que la minoration est vraie pour $k \in \mathbb{N}$ et la majoration, pour $k \in \mathbb{N}^*$. C'était plus simple que de tout sommer sur $1 \leq k \leq n$, puis de rebricoler la minoration (assez nombreux, toutefois, sont ceux qui s'y sont pris comme ça et dont la preuve était parfaitement correcte).

Une fois l'encadrement obtenu, il fallait en déduire la convergence de la série par comparaison, ce qui a la plupart du temps été mal fait.

- Les gendarmes sont à ce stade hors-sujet car la limite du minorant et celle du majorant ne sont pas identiques (elles diffèrent de $f(0)$). Si les deux gendarmes ne vont pas au même endroit, le suspect va où il veut...
- Il était nécessaire de préciser quel type de comparaison l'on faisait. Rappelons que le *théorème de comparaison série-intégrale* est passé hors programme et qu'il n'est permis d'utiliser que la technique. Bref : le fait que f soit croissante permettait d'écrire

$$\sum_{k=0}^n f(ka) \leq f(0) + \int_0^{+\infty} f(t) dt,$$

ce qui montrait que la suite des sommes partielles de la série $\sum f(ka)$ était majorée, d'où sa convergence (propriété des séries à termes positifs). On n'obtenait ainsi pas la convergence de la série « par encadrement », mais par majoration.

- Peu ont compris l'intérêt de préciser que f n'était pas la fonction nulle. Cela garantit que $\int_0^{+\infty} f \neq 0$, précision sans laquelle l'équivalent n'a pas de sens (~ 0).

— Pour en terminer avec Q6, une fois qu'on avait l'encadrement

$$\frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^{\infty} f(ka) \leq f(0) + \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(t) dt,$$

on pouvait, cette fois, utiliser le théorème des gendarmes car, ce qui n'était pas vrai précédemment à a fixé, le devenait en faisant tendre a vers 0 : minorant et majorant étaient équivalents (en utilisant que $\int f \neq 0$).

• Fin du premier problème. Q10 a en général été bien réussie, Q9, moins : il fallait remarquer que, f étant décroissante, $|f'| = -f'$, ce qui permettait de primitiver et d'utiliser le théorème de comparaison. Je rappelle qu'il n'est pas possible de primitiver $|f'|$ en général.

Tout le monde a vu que la partie 4 reposait sur le C.S.S.A. Encore fallait-il en connaître les trois hypothèses et les vérifier soigneusement toutes les trois. Attention : pour qu'une série de la forme $\sum (-1)^n w_n$ soit une série alternée, encore faut-il que $(w_n)_n$ soit de signe constant. Quand le terme général est défini par une intégrale avec un sinus à l'intérieur, la question se pose sérieusement. Attention, pour montrer que $\lim u_n = 0$, à ne pas passer à la limite sous l'intégrale, mais de bien la majorer.

Néanmoins, la difficulté principale résidait en Q12, qui a été largement commentée plus haut.

Problème 2

La question Q14 n'était pas très difficile, mais un peu technique pour le calcul de la limite en Q14a. Un certain nombre y sont parvenus. Les autres peuvent refaire le calcul, qui est standard. Il fallait absolument passer par les parties réelle et imaginaire. En revanche, cela n'était nullement nécessaire pour la non intégrabilité : $\frac{1}{|t-z|} \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{|t|}$ faisait l'affaire. Rappelons que $\int_{\mathbb{R}} f$ converge si, et seulement si, par définition, $\int_{\mathbb{R}_-} f$ et $\int_{\mathbb{R}_+} f$ convergent.

Il y avait un problème en Q15. Il fallait en effet reprendre l'hypothèse $z_\ell \notin \mathbb{R}$ pour toute racine z_ℓ de Q , qui avait mystérieusement disparu de l'énoncé. Dans le cas contraire, la fonction $\frac{P}{Q}$ n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et les théories de l'intégrale plus générales en de $\int_{\mathbb{R}} \frac{P}{Q}$ une intégrale toujours divergente... Si quelqu'un a vu le souci, il aurait dû le dire en direct. Tous ceux qui ont fait comme si c'était le cas, et même ceux qui ont (mal) traité le cas où Q avait des racines réelles, ont eu les points (il n'y en avait peu : il suffisait d'appliquer Q14 et d'invoquer la linéarité de l'intégrale).

La suite du problème était un peu calculatoire et a été très mal traitée. En Q19a, il y avait un lapsus évident ($I_{p,q}$ au lieu de $I_{p,n}$).

Avec la formule de Q16, que l'on pouvait évidemment utiliser sans l'avoir démontrée, il était facile de calculer les résidus. J'ai vu beaucoup d'erreurs sur les racines de $X^4 + 1$, puis, logiquement, sur celles de $X^{2n} + 1$. Profitez des vacances pour faire une petite révision rapide sur les racines de l'unité. Cette partie du problème vous vous servir à cela. Personne n'a mené à bien le calcul de Q19c, qui n'était pas si compliqué que ça, mais qu'il était rentable de passer pour traiter le début du problème 3.

Ce dernier problème était vraiment original. J'ai développé le corrigé de la dernière question, qui était un peu rapide dans la première version. Noter que la question Q24 aurait dû être assez facile alors que la majorité de ceux qui l'ont abordée ont raconté n'importe quoi...

Reprenez ce DS (en fonction, évidemment, de ce que vous aviez fait). C'est l'une des meilleurs façons de progresser. Bonnes vacances quand même. Profitez-en pour travailler de manière plus détendue, rattraper un peu de retard pour les uns, approfondir certaines choses pour les autres.