Mines-Ponts, PSI, 2015 – TD 2026-2027

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$).

— Dans $\mathscr{E}_n = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ espace vectoriel réel de dimension n, on utilise le produit scalaire canonique défini par

$$\forall (U,V) \in {\mathscr{E}_n}^2 : (U \,|\, V) = U^{\mathsf{T}} V.$$

— On note $\mathscr{M}_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels.

— Pour $A \in \mathscr{M}_n$, on note $\mathrm{Ker}(A) = \left\{X \in \mathscr{E}_n \,;\; AX = 0\right\}$ le noyau de A vu comme endomorphisme de $\mathscr{E}_n$.

— Dans $\mathscr{M}_n$, on notera 0_n la matrice nulle et I_n la matrice unité. Le déterminant est noté det.

— $\mathscr{G}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n \,;\; \det(M) \neq 0\}$ désigne le groupe linéaire des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n$.

1 Le groupe symplectique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit J_n, ou simplement J, la matrice de $\mathscr{M}_{2n}$ définie par blocs par $J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

On note $\mathscr{S}_{p_{2n}} = \left\{M \in \mathscr{M}_{2n};\; M^{\mathsf{T}} J M = J\right\}$.

1. Calculer J^2 et J^{T} en fonction de I_{2n} et J. Montrer que J est inversible et identifier son inverse.

2. Vérifier que $J \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$ et que pour tout réel α,

$$K(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_{p_{2n}}.$$

3. Pour tout $U \in \mathscr{G}_n$, vérifier que $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^{\mathsf{T}} \end{pmatrix}$ est dans $\mathscr{S}_{p_{2n}}$.

4. Calculer $\det(J)$. Si $M \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$, montrer que $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

5. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathscr{S}_{p_{2n}}$ est un élément de $\mathscr{S}_{p_{2n}}$.

6. Montrer qu'un élément de $\mathscr{S}_{p_{2n}}$ est inversible et que son inverse appartient à $\mathscr{S}_{p_{2n}}$.

7. Montrer que si $M \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$ alors $M^{\mathsf{T}} \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$.

8. Soit M une matrice de $\mathscr{M}_{2n}$ écrite par blocs sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $(A,B,C,D) \in {\mathscr{M}_n}^4$. Montrer que

$$M \in \mathscr{S}_{p_{2n}} \iff \begin{cases} A^{\mathsf{T}} C \text{ et } B^{\mathsf{T}} D \text{ sont symétriques} \\ D^{\mathsf{T}} A - B^{\mathsf{T}} C = I_n. \end{cases}$$

2 Centre de $\mathscr{S}_{p_{2n}}$

On s'intéresse ici au *centre* $\mathcal{Z}$ de $\mathscr{S}_{p_{2n}}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{Z} = \left\{M \in \mathscr{S}_{p_{2n}};\; \forall N \in \mathscr{S}_{p_{2n}},\; MN = NM\right\}.$$

9. Justifier l'inclusion $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$.

Réciproquement, soit $M \in \mathcal{Z}$ écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (A, B, C, D) \in {\mathscr{M}_n}^4.$$

10. En utilisant $L = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et sa transposée, obtenir $B = C = 0_n$ et $D = A$, A étant inversible.

11. Soit $U \in \mathscr{G}_n$. En utilisant $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^{\mathsf{T}} \end{pmatrix}$, montrer que A commute avec toute matrice $U \in \mathscr{G}_n$.

12. Conclure que $A \in \{-I_n, I_n\}$ et $\mathcal{Z} = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$. *Indication : on montrera d'abord que les matrices $I_n + E_{i,j}$ commutent avec A, où $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la base canonique de $\mathscr{M}_n$.*

3 Déterminant d'une matrice symplectique

Soit M dans $\mathscr{S}_{p_{2n}}$ que l'on décompose sous forme de matrice par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{1}.$$

avec $(A, B, C, D) \in {\mathscr{M}_n}^4$. Dans toute cette partie, les matrices A, B, C, D sont les matrices de cette décomposition.

On suppose dans les questions 13 et 14 que D est inversible.

13. Montrer qu'il existe $(Q, U, V, W) \in {\mathscr{M}_n}^4$ tel que

$$\begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

14. En utilisant la question 8, vérifier que BD^{-1} est symétrique, puis que

$$\det(M) = \det(A^{\mathsf{T}}D - C^{\mathsf{T}}B) = 1.$$

Soient $P, Q \in \mathscr{M}_n$ telles que $P^{\mathsf{T}}Q$ soit symétrique et Q non inversible. On suppose qu'il existe deux réels différents s_1, s_2 et deux vecteurs V_1, V_2 non nuls dans $\mathscr{E}_n$ tels que

$$(Q - s_1P)V_1 = (Q - s_2P)V_2 = 0.$$

15. Montrer que le produit scalaire $(QV_1 \,|\, QV_2)$ est nul.

On suppose dorénavant D non inversible.

16. Montrer que $\mathrm{Ker}(B) \cap \mathrm{Ker}(D) = \{0\}$.

Soit m un entier, $m \leqslant n$. Soient $s_1, \ldots, s_m$ des réels non nuls deux à deux distincts et $V_1, \ldots, V_m$ des vecteurs non nuls tels que

$$\forall i \in [\![1, m]\!] : (D - s_iB)V_i = 0.$$

17. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $DV_i \neq 0$ et que la famille $(DV_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ forme un système libre de $\mathscr{E}_n$.

18. En déduire qu'il existe un réel α tel que $D - \alpha B$ soit inversible.

19. Montrer alors que toute matrice de $\mathscr{S}_{p_{2n}}$ est de déterminant égal à 1.