Mines, PSI* 2015 – TD 2026-2027, corrigé

1. Le calcul par blocs donne $J^2 = -I_{2n}$, soit $J \times (-J) = I_{2n}$, ce qui montre que J est inversible, d'inverse $-J$. Par ailleurs, $J^\mathsf{T} = -J$. Noter que tous les calculs par blocs du problème font intervenir des matrices de $\mathscr{M}_{2n}$ découpées en quatre blocs de $\mathscr{M}_n$ et sont de ce fait licites. Dans la suite, on notera $\mathrm{Diag}(A, B)$ la matrice diagonale par blocs correspondante.

2. D'après la première question, $J^\mathsf{T}JJ = (-J)(-I_{2n}) = J$, donc $J \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$. Par ailleurs, $K(\alpha) \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$ car

$$\begin{aligned} K(\alpha)^\mathsf{T}JK(\alpha) &= \begin{pmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha I_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} = J. \end{aligned}$$

3. Les calculs par blocs ne posent toujours pas de problème et l'on a de manière similaire (ou en utilisant les dilatations par blocs),

$$L_U^\mathsf{T}JL_U = \begin{pmatrix} U^\mathsf{T} & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^\mathsf{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^\mathsf{T} & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_n & -(U^{-1})^\mathsf{T} \\ U & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} = J,$$

soit $L_U \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$ (on a utilisé que $(U^{-1})^\mathsf{T} = (U^\mathsf{T})^{-1}$).

4. On calcule $\det(J)$ en notant que la transposition par blocs $\mathcal{L}_1 \leftrightarrow \mathcal{L}_2$, qui revient aux n transpositions $L_i \leftrightarrow L_{n+i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, donne $\det(J) = (-1)^n \det(\mathrm{Diag}(I_n, -I_n)) = (-1)^n \times (-1)^n = 1$.

La relation $M^\mathsf{T}JM = J$ et l'égalité $\det(M) = \det(M^\mathsf{T})$ donnent $\det(J)(\det(M))^2 = \det(J)$. On peut simplifier par $\det(J) \neq 0$ car on a vu que $J \in \mathscr{G}_n$, d'où, comme M est réelle, $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

5. Soient M et N deux éléments de $\mathscr{S}_{p_{2n}}$. Alors,

$$(MN)^\mathsf{T}J(MN) = (N^\mathsf{T}M^\mathsf{T})J(MN) = N^\mathsf{T}(M^\mathsf{T}JM)N = N^\mathsf{T}JN = J \quad \therefore \quad MN \in \mathscr{S}_{p_{2n}}.$$

6. La question 4 montre que $\mathscr{S}_{p_{2n}} \subset \mathscr{G}_{2n}$. Soit $M \in \mathscr{G}_{2n}$. Alors, en utilisant l'identité $(M^\mathsf{T})^{-1} = (M^{-1})^\mathsf{T}$,

$$M \in \mathscr{S}_{p_{2n}} \iff M^\mathsf{T}JM = J \iff M^\mathsf{T}J = JM^{-1} \iff J = (M^{-1})^\mathsf{T}JM^{-1} \iff M^{-1} \in \mathscr{S}_{p_{2n}}.$$

7. Soit $M \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$. Alors, $M^{-1} \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$ d'après la question 6, soit $(M^{-1})^\mathsf{T}JM^{-1} = J$. En prenant l'inverse de cette relation, il vient $MJ^{-1}M^\mathsf{T} = J^{-1}$, d'où, par $J^{-1} = -J$, $MJM^\mathsf{T} = M^{\top\top}JM^\mathsf{T} = J$ et $M^\mathsf{T} \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$. On peut aussi dire que $M^\mathsf{T}JM = J$ donne $M^\mathsf{T} = JM^{-1}J^{-1}$, d'où $M \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$ d'après les questions 2, 5 et 6.

8. Le calcul par blocs donne

$$M^\mathsf{T}JM = \begin{pmatrix} A^\mathsf{T} & C^\mathsf{T} \\ B^\mathsf{T} & D^\mathsf{T} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^\mathsf{T}C + C^\mathsf{T}A & -A^\mathsf{T}D + C^\mathsf{T}B \\ -B^\mathsf{T}C + D^\mathsf{T}A & -B^\mathsf{T}D + D^\mathsf{T}B \end{pmatrix} \quad \therefore$$

$$M^\mathsf{T}JM = J \iff \begin{cases} -A^\mathsf{T}C + C^\mathsf{T}A = 0_n \\ -A^\mathsf{T}D + C^\mathsf{T}B = -I_n \\ -B^\mathsf{T}C + D^\mathsf{T}A = I_n \\ -B^\mathsf{T}D + D^\mathsf{T}B = 0_n \end{cases} \iff \begin{cases} A^\mathsf{T}C \text{ et } B^\mathsf{T}D \text{ sont symétriques} \\ D^\mathsf{T}A - B^\mathsf{T}C = I_n, \end{cases}$$

les deux relations $-A^\mathsf{T}D + C^\mathsf{T}B = -I_n$ et $-B^\mathsf{T}C + D^\mathsf{T}A = I_n$ étant équivalentes par transposition.

9. L'identité commute avec tout le monde, en particulier avec les matrices de $\mathscr{S}_{p_{2n}}$. De plus, $\mathscr{S}_{p_{2n}}$ est clairement stable par passage à l'opposé (si $M \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$, alors $-M \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$). Enfin, $I_{2n} = K(0) \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$ d'après la question 2. Il s'ensuit que $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$.

10. Les matrices $L^{\mathsf{T}} = K(-1)$ et $L = L^{\mathsf{TT}}$ appartiennent à $\mathscr{S}_{p_{2n}}$ par les questions 2 et 7.

$$\begin{aligned} ML = LM &\iff \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} A & A+B \\ C & C+D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+C & B+D \\ C & D \end{pmatrix} \iff C = 0_n \ \&\ A = D, \\ ML^{\mathsf{T}} = L^{\mathsf{T}}M &\iff \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} A+B & B \\ C+D & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ A+C & B+D \end{pmatrix} \iff B = 0_n \ \&\ A = D. \end{aligned}$$

En reportant $B = C = 0_n$ et $A = D$ dans les conditions caractérisant $M \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$ obtenues à la question 8, il vient $A^{\mathsf{T}}A = I_n$, donc A est inversible (plus précisément, $A \in \mathcal{O}(n)$). On peut aussi écrire $1 = \det(M) = (\det(A))^2$ par la question 4, d'où $\det(A) \neq 0$.

11. On sait par la question 3 que $L_U \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$. La question précédente montre que si $M \in \mathcal{Z}$, alors M est diagonale par blocs de la forme $M = \mathrm{Diag}(A, A)$ avec A inversible. Comme L_U est également diagonale par blocs, $ML_U = \mathrm{Diag}(AU, A(U^{-1})^{\mathsf{T}})$ et $L_U M = \mathrm{Diag}(UA, (U^{-1})^{\mathsf{T}}A)$. En particulier, $AU = UA$, donc $A \in \mathcal{Z}(\mathscr{G}_n)$ (*i.e.* A commute avec toute matrice inversible de taille n).

12. Les matrices $I_n + E_{i,j}$ sont triangulaires inversibles et elles doivent donc commuter avec A. Ce sont des matrices d'opérations élémentaires : si $i \neq j$, la multiplication à gauche par $I_n + E_{i,j}$ effectue la transvection $L_i \leftarrow L_i + L_j$ et la mutiplication à droite $C_j \leftarrow C_j + C_i$. Si $i = j$, l'opération correspondante est une dilatation, mais on n'en a pas besoin ici.

Soit donc $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$. L'égalité $A(I_n + E_{i,j}) = (I_n + E_{i,j})A$ équivaut à $AE_{i,j} = E_{i,j}A$.

$$AE_{i,j\,|k,\ell} = \sum_{r=1}^{n} a_{k,r}E_{i,j\,|r,\ell} = \sum_{r=1}^{n} a_{k,r}\delta_{i,r}\delta_{j,\ell} = \delta_{j,\ell}a_{k,i} \quad \& \quad E_{i,j}A_{|k,\ell} = \sum_{r=1}^{n} E_{i,j\,|k,r}a_{r,\ell} = \delta_{i,k}a_{j,\ell} \qquad \therefore$$
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \colon AE_{i,j} = E_{i,j}A \iff \forall (i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4 \colon \delta_{j,\ell}a_{k,i} = \delta_{i,k}a_{j,\ell}.$$

L'égalité est toujours vraie si $j \neq \ell$ et $i \neq k$. Si $j \neq \ell$ et $i = k$, elle donne $a_{j,\ell} = 0$ et, pour $j = \ell$ et $i = k$, elle donne $a_{i,i} = a_{\ell,\ell}$. Ainsi, A est une matrice d'homothétie. Enfin, pour $A = \lambda I_n$, la condition $\det(M) = (\det(A))^2 = 1$ impose que $\lambda \in \{-1, 1\}$, ce qui donne $M \in \{-I_{2n}, I_{2n}\}$.

13. Le produit donne

$$\begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U+QV & QW \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

si, et seulement si, $U + QV = A$, $QW = B$, $V = C$ et $W = D$.
Il vient $V = C$, $W = D$, $Q = BW^{-1} = BD^{-1}$ et $U = A - QV = A - BD^{-1}C$.

14. La question 8 a montré que $B^{\mathsf{T}}D = (B^{\mathsf{T}}D)^{\mathsf{T}} = D^{\mathsf{T}}B$. On en déduit que BD^{-1} est symétrique :

$$B^{\mathsf{T}}D = D^{\mathsf{T}}B \iff (D^{\mathsf{T}})^{-1}B^{\mathsf{T}}DD^{-1} = (D^{\mathsf{T}})^{-1}D^{\mathsf{T}}BD^{-1} \iff (D^{\mathsf{T}})^{-1}B^{\mathsf{T}} = BD^{-1} \iff (BD^{-1})^{\mathsf{T}} = BD^{-1}.$$

Les matrices construites à la question 13 (membre de gauche de l'équation) sont triangulaires par blocs, ce qui permet d'exprimer leur déterminant comme le produit des déterminants de leurs blocs diagonaux. Avec les expressions de U et de W, et en utilisant le fait que $\det(H) = \det(H^{\mathsf{T}})$ et la multiplicativité, il vient

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det(I_n)^2 \det(U)\det(W) = \det(A - (BD^{-1})C)\det(D) = \det(A^{\mathsf{T}} - C^{\mathsf{T}}(BD^{-1})^{\mathsf{T}})\det(D) \\ &= \det(A^{\mathsf{T}} - C^{\mathsf{T}}(BD^{-1}))\det(D) = \det(A^{\mathsf{T}}D - C^{\mathsf{T}}B) \underset{\text{(qu. 8)}}{=} \det(I_n) = 1. \end{aligned}$$

15. On utilise les égalités $QV_i = s_iPV_i$ (pour $i \in \{1, 2\}$) et l'égalité $Q^{\mathsf{T}}P = P^{\mathsf{T}}Q$.

$$(QV_1 \,|\, QV_2) = (QV_1)^{\mathsf{T}}(QV_2) = \begin{cases} (s_1PV_1)^{\mathsf{T}}(QV_2) = s_1V_1^{\mathsf{T}}P^{\mathsf{T}}QV_2 \\ (QV_1)^{\mathsf{T}}(s_2PV_2) = s_2V_1^{\mathsf{T}}Q^{\mathsf{T}}PV_2 = s_2V_1^{\mathsf{T}}P^{\mathsf{T}}QV_2. \end{cases}$$

Comme $s_1 \neq s_2$, on a bien $(QV_1 \,|\, QV_2) = 0$.

16. Soit $V \in \mathscr{E}_n$ tel que $BV = DV = 0$. Alors,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BV \\ DV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M),$$

donc $V = 0$ car M est inversible d'après la question 4.

On peut aussi utiliser la question 8 et la relation $D^{\mathsf{T}}A - B^{\mathsf{T}}C = I_n$, d'où $A^{\mathsf{T}}D - C^{\mathsf{T}}B = I_n$ en transposant. Alors, pour $X \in \mathrm{Ker}\, B \cap \mathrm{Ker}\, D$, il vient $A^{\mathsf{T}}DX - C^{\mathsf{T}}BX = X \iff X = 0$.

17. Si $DV_i = 0$, alors $s_i BV_i = DV_i = 0$, donc $BV_i = 0$ car $s_i \neq 0$. Alors, $V_i \in \mathrm{Ker}(D) \cap \mathrm{Ker}(B)$, donc $V_i = 0$ d'après la question 16. Par ailleurs, la question 8 montre que $B^{\mathsf{T}}D$ est symétrique et l'on peut donc appliquer la question 15 avec $Q = D$ et $P = B$: la famille $(DV_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ est ainsi une famille orthogonale de vecteurs non nuls, donc une famille libre.

18. La question 17 montre que $D - \alpha B$ est non inversible pour *au plus* n valeurs de α, puisque, d'après la question précédente, m valeurs distinctes de α (les s_i) produisent un système libre de m vecteurs de $\mathscr{M}_n$ (les V_i). Comme $\mathbb{R}$ est infini, il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $D - \alpha B \in \mathscr{G}_n$.

19. Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$, alors, d'après la question 2,

$$\mathscr{S}_{p_{2n}} \ni K(\alpha)M = \begin{pmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C - \alpha A & D - \alpha B \end{pmatrix}.$$

Enfin, $\det(M) = \det\big(K(\alpha)M\big) = 1$ d'après les questions 14 et 17.