Deux annales (relativement) élémentaires – 2026-2027

Exercice I — Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes (CCINP PC, 2022)

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V)).$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le *quotient* et le *reste* de la division euclidienne du polynôme U par le polynôme V.

Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n+1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui, à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, associe le reste dans la division euclidienne de AP par B. Par exemple, si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B, on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X,$$

donc on a $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

1. Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

a. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

b. On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse. En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 2$, $A = X^2 + 2X$ et $B = X^3 + X^2 - X - 1$.

a. Compléter la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot \\ 2 & 1 & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot \end{pmatrix}$ et justifier le contenu des deux premières colonnes.

b. Déterminer les valeurs propres (si vous ne trouvez pas que $-1 \in \mathrm{Sp}(M)$, reprenez le calcul de la question précédente) et les sous-espaces propres de la matrice M.

c. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ.

3. Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 2$ et $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

a. Déterminer la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$.

b. Déterminer les polynômes A tels que l'endomorphisme φ soit diagonalisable.

4. Dans cette question, on ne suppose plus que $n = 2$. Le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. On suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ les racines de B, qui sont donc des nombres complexes deux à deux distincts. On note $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

a. *Question de cours.* Rappeler l'expression des L_i et montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

b. Déterminer la matrice de l'endomorphisme φ dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$.

c. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable et préciser ses valeurs et espaces propres.

Exercice II — Spectre d'une matrice tridiagonale (E3A MP, 2015)

À $(a_n)_{n\geqslant 1}$, une suite de réels, et $(b_n)_{n\geqslant 1}$, une suite de réels non nuls, on associe la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

La matrice A_n est ainsi définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On note P_n son polynôme caractéristique.

1. *Éléments propres*

a. Justifier que A_n est diagonalisable.

b. Soit λ une valeur propre de la matrice A_n. Calculer le déteminant de la matrice extraite de $\lambda I_n - A_n$ en en supprimant la première colonne et la dernière ligne, soit

$$\begin{vmatrix} -b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda - a_2 & -b_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ -b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & -b_{n-2} & \lambda - a_{n-1} & -b_{n-1} \end{vmatrix}.$$

En déduire le rang de $\lambda I_n - A_n$.

c. Combien la matrice A_n a-t-elle de valeurs propres *distinctes* ?

2. Montrer la relation $P_{n+1} = (X - a_{n+1})P_n - b_n^2 P_{n-1}$.

3. On note $\Delta_n = \begin{vmatrix} P'_{n+1} & P'_n \\ P_{n+1} & P_n \end{vmatrix}$ (déterminant de la matrice 2×2 dont les coefficients sont P_n, P_{n+1} et leurs dérivées).

a. Montrer que $\Delta_n = P_n^2 + b_n^2 \Delta_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 2$.

b. Montrer que $\Delta_1(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire le signe de $\Delta_n(x)$ pour $n \geqslant 2$.

4. On pose $Q_n(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$.

a. Étudier les variations de Q_n.

b. Montrer que A_n et A_{n+1} n'ont aucune valeur propre commune.

c. Comment se situent les valeurs propres de A_{n+1} par rapport à celles de A_n ?