Deux annales (relativement) élémentaires – 2026-2027, corrigé

Exercice I — Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes (CCINP PC, 2022)

1.a. Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\varphi(P)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à $\deg(B)$, donc de degré au plus n. Ainsi, $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.
1.b. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. De $AP_1 = BQ_1+R_1$ et $AP_2 = BQ_2+R_2$, on tire $A(aP_1+bP_2) = B(aQ_1+bQ_2)+aR_1+bR_2$ avec $aR_1 + bR_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par unicité du reste de la division euclidienne, $aR_1 + bR_2 = \varphi(aP_1 + bP_2)$, ce qui montre la linéarité de φ. Notons, puisque l'énoncé le demande, que $aQ_1 + bQ_2$ est le quotient de la division euclidienne de $A(aP_1 + bP_2)$ par B. Finalement, $\varphi \in \mathcal{L}\big(\mathbb{C}_n[X]\big)$.

2.a. Les colonnes de la matrice M correspondent aux images par φ des éléments de la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$. Explicitement,

$$1 \times (X^2+2X) = 0 \times (X^3+X^2-X-1) + 2X + X^2 \qquad \therefore \qquad C_1(M) = \begin{pmatrix}0 & 2 & 1\end{pmatrix}^\top,$$
$$X \times (X^2+2X) = 1 \times (X^3+X^2-X-1) + 2X + X^2 + X + 1 \qquad \therefore \qquad C_1(M) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^\top.$$

Pour la troisième colonne, on effectue pour de bon la division euclidienne :

$$\begin{array}{rr|l} X^4 + 2X^3 & & X^3 + X^2 - X - 1 \\ \cline{3-3} X^3 + X^2 + X & & X + 1 \\ 2X + 1 & & \end{array} \qquad \therefore \qquad C_3(M) = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \quad \& \quad M = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\2 & 1 & 2\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

2.b. Le plus rapide est de noter directement que $M + I_3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 2 & 2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, d'où $\operatorname{rg}(M+I_3) = 1$, ce qui indique que -1 est valeur propre avec un espace propre correspondant de dimension 2, le plan d'équation $x+y+z=0$. Comme $(X+1)^2 \mid \chi_M$, χ_M est scindé et M est trigonalisables, donc la somme des valeurs propres vaut $\operatorname{tr}(M) = 1$, ce qui donne l'autre valeur propre, 3. Si l'on ne voit pas que $M + I_3$ est non inversible, on procède de manière standard :

$$\chi_M(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ -2 & x-1 & -2 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix}_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + xL_1}} = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ -2x-2 & x+1 & 0 \\ x^2-1 & -x-1 & 0 \end{vmatrix} = (x+1)^2 \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ x-1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\overset{(\text{dév. } C_3)}{=} -(x+1)^2(2-x+1) = (x+1)^2(x-3).$$

Le calcul des espaces propres se fait à partir de la matrice ayant subi des opérations élémentaires sur les lignes, ce qui conserve le noyau.

$$E_{-1}(M) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ est le plan d'équation } x+y+z=0, \qquad \&$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_3(M) \iff \begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\-2 & 1 & 0\\2 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}3x-y-z=0\\-2x+y=0\end{cases} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

2.c. La somme des dimensions des espaces propres de M vaut 3, donc $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable et, par là-même, ϕ aussi. On complète la question précédente en donnant une base du plan $E_{-1}(M)$, par exemple, $\big(\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix}^\top\big)$ et en traduisant les résultats en termes de l'endomorphisme φ :

$$\operatorname{Sp}(\varphi) = \operatorname{Sp}(M) = \{-1, 3\}, \quad E_{-1}(\varphi) = \operatorname{Vect}\big(X-1, X^2-1\big) \quad \& \quad E_3(\varphi) = \operatorname{Vect}\big((X+1)^2\big).$$

3.a. On pose $n=2$, $B = X^3$ et $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$. Pour déterminer la matrice de φ, on procède comme pour l'exemple précédent. En notant à nouveau M la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$,

$$1 \times (\alpha+\beta X+\gamma X^2) = 0 \times X^3 + \alpha + \beta X + \gamma X^2 \qquad \therefore \qquad C_1(M) = \begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}^\top,$$
$$X(\alpha+\beta X+\gamma X^2) = \gamma X^3 + \alpha X + \beta X^2 \qquad \therefore \qquad C_2(M) = \begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta\end{pmatrix}^\top,$$
$$X^2(\alpha+\beta X+\gamma X^2) = (\beta+\gamma X)X^3 + \alpha X^2 \qquad \therefore \qquad C_3(M) = \begin{pmatrix}0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}^\top$$

3.b. On a ainsi $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Cette matrice est triangulaire inférieure et l'on a donc sans calcul $\chi_M = (X-\alpha)^3$. Alors, M est diagonalisable si, et seulement si, M est semblable à αI_3, qui n'est semblable qu'à elle-même, donc si $\beta = \gamma = 0$, soit $A \in \mathbb{C}_0[X]$.

4.a. On note $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{C}^{n+1}$. Par définition, L_i est l'image réciproque de ε_{i+1} par l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\colon \mathbb{C}[X] &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ P &\longmapsto \big(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)\big). \end{aligned}$$

L'image réciproque d'une famille libre étant nécessairement libre, $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{C}_n[X]$ et une base de cet espace par dimension. Enfin, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$.

Pour montrer que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une famille libre, on pouvait alternativement évaluer en x_i l'expression $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \alpha_j L_j = 0$, ce qui donne $\alpha_i = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \delta_{i,j} = 0$.

4.b. Soit $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$. Écrivons la division euclidienne $L_i A = Q_i B + R_i$ avec $\deg R_i < \deg B = n$. En prenant $X \leftarrow x_j$, il vient $L_i(x_j)A(x_j) = Q_i(x_j)B(x_j) + R_i(x_j)$, soit $\delta_{i,j} A(x_j) = 0 + R_i(x_j)$. Autrement dit, $\mathfrak{L}(R_i) = A(x_i)\varepsilon_{i+1} = \mathfrak{L}\big(A(x_i)L_i\big)$. Comme $\mathfrak{L}$ est un isomorphisme, $R_i = A(x_i)L_i$, d'où

$$\operatorname{mat}_{(L_0, L_1, \dots, L_n)}(\varphi) = \operatorname{diag}\big(A(x_0), A(x_1), \dots, A(x_n)\big).$$

4.c. Il est clair d'après la question précédente, qui a exhibé une base de $\mathbb{C}_n[X]$ formée de vecteurs propres de φ, que φ est diagonalisable. Ses valeurs propres sont les $A(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$ et les espaces propres sont $E_{A(x_i)}(\varphi) = \operatorname{Vect}\big(L_j\,;\, 0 \leqslant j \leqslant n \;\&\; A(x_j) = A(x_i)\big)$.

Exercice II (E3A MP, 2015)

1.a. La matrice A_n est diagonalisable car symétrique réelle.

1.b. Le déterminant de la matrice extraite, triangulaire inférieure, vaut $(-1)^{n-1} \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} b_i$.

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(A_n)$. La matrice $\lambda I_n - A_n$ est non inversible, donc de rang au plus $n-1$. Par ailleurs, la question 2.b. montre que $\operatorname{rg}\big(C_2(\lambda I_n - A), \dots, C_n(\lambda I_n - A_n)\big) = n-1$, d'où $\operatorname{rg}(\lambda I_n - A_n) \geqslant n-1$. On a ainsi $\operatorname{rg}(\lambda I_n - A_n) = n-1$.

1.c. D'après la question précédente, tous les espaces propres sont des droites vectorielles (théorème du rang). Comme, de plus, A_n est diagonalisable, la somme des dimensions de ses espaces propres vaut n, donc A_n admet n valeurs propres distinctes.

2. On calcule le déterminant en le développant par rapport à la dernière colonne. Cela donne une somme de deux termes, $(X - a_{n+1})P_n$ et un autre déterminant, d'ordre n, que multiplie b_n. On développe ce déterminant par rapport à la dernière ligne. On obtient

$$P_{n+1}(x) = (x - a_{n+1})P_n(x) + b_n \begin{vmatrix} x - a_1 & -b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_1 & x - a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -b_{n-2} & 0 \\ \vdots & & -b_{n-2} & x - a_{n-1} & -b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -b_n \end{vmatrix} = (x - a_{n+1})P_n(x) - b_n^2 P_{n-1}(x).$$

3.a. En dérivant la relation $P_{n+1} = (X - a_{n+1})P_n - b_n^2 P_{n-1}$, il vient $P'_{n+1} = P_n + (X - a_{n+1})P'_n - b_n^2 P'_{n-1}$. On

en déduit

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \big(P_n + (X-a_{n+1})P'_n - b_n^2 P'_{n-1}\big)P_n - \big((X-a_{n+1})P_n - b_n^2 P_{n-1}\big)P'_n \\ &= P_n^2 + (X-a_{n+1})P'_n P_n - b_n^2 P_n P'_{n-1} - (X-a_{n+1})P'_n P_n(x) + b_n^2 P_{n-1}P'_n \\ &= P_n^2 + b_n^2(P_{n-1}P'_n - P_n P'_{n-1}\big) = P_n^2 + b_n^2\Delta_{n-1}.\end{aligned}$$

3.b. On a $P_1 = X - a_1$ et $P_2 = (X-a_1)(X-a_2) - b_1^2$, d'où $P'_1 = 1$ et $P'_2 = 2X - a_1 - a_2$, soit, après un petit calcul, $\Delta_1(x) = (x-a_1)^2 + b_1^2 > 0$.
Puis, par une récurrence immédiate sur n à partir de la relation de la question 3.a. : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \Delta_n(x) > 0$.

4.a. La fraction rationnelle Q_n est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathrm{Sp}(A_n)$ et $Q'_n(x) = \dfrac{\Delta_n(x)}{P_n^2(x)} > 0$, donc Q_n est strictement croissante... sur chaque intervalle $]\lambda_{n,i}, \lambda_{n,i+1}[$, ainsi que sur $]-\infty, \lambda_{n,1}[$ et sur $]\lambda_{n,n} + \infty[$, où l'on note $\lambda_{n,1} < \lambda_{n,2} < \cdots < \lambda_{n,n}$ les n valeurs propres distinctes de A_n (question 1.c).
4.b. Supposons par l'absurde que $P_{n+1}(\lambda_{n,k}) = 0$. Alors, $\Delta_n(\lambda_{n,k}) = 0$ car $P_n(\lambda_{n,k}) = 0$, ce qui est en contradiction avec la question 3.b.
4.c. La fonction Q'_n est strictement croissante sur les $n+1$ intervalles de la forme $]\lambda_{n,i}, \lambda_{n,i+1}[$ (en posant $\lambda_{n,0} = -\infty$ et $\lambda_{n,n+1} = +\infty$). De plus, elle admet des limites infinies à droite et à gauche en chacun des $\lambda_{n,k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Il s'ensuit qu'elle s'annule sur tous ces intervalles, ce qui montre que les zéros de P_{n+1} et de P_n sont entrelacés.