# Mines–Ponts, PC-PSI, 2025 (3h)

## Notations et définitions.

On note $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes, $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{M}_n$ désigne l'algèbre des matrices carrées complexes de taille $n$ et $\mathbf{GL}_n$ le groupe des matrices complexes inversibles de taille $n$. On rappelle que deux matrices $A$ et $B$ de $\mathbf{M}_n$ sont semblables si

$$\exists P \in \mathbf{GL}_n, \quad A = P^{-1}BP.$$

Pour toute matrice $A \in \mathbf{M}_n$ le polynôme caractéristique de $A$ est défini par

$$\chi_A = \det(XI_n - A).$$

## Partie 1. Polynômes réciproques

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré $p$ est dit *réciproque* lorsqu'il satisfait l'égalité

$$P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$$

**1.** Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré $p$. On écrit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, où $a_0, \dots a_p$ sont des nombres complexes, et $a_p \neq 0$. Montrer que $P$ est réciproque si et seulement si, pour tout entier $k, 0 \leq k \leq p$, on a l'égalité $a_k = a_{p-k}$.

**2.** Soit $P$ un polynôme de degré $p$ écrit sous forme factorisée $P = a_p \prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)^{m_i}$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont les racines complexes distinctes de $P$ et $m_1, \dots, m_d$ leurs multiplicités.

Écrire sous forme factorisée le polynôme $X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$ et démontrer que, si $P$ est réciproque, alors, pour tout entier $i, 1 \leq i \leq d$, $\lambda_i$ est non nul et $\frac{1}{\lambda_i}$ est racine de $P$ avec la multiplicité $m_i$.

**3.** Soit $Q$ un polynôme de degré $p$. On dit que $Q$ est *antiréciproque* si

$$Q(X) = -X^p Q\left(\frac{1}{X}\right)$$

Montrer que si $Q$ est antiréciproque, 1 est une racine de $Q$ et qu'il existe un polynôme $P$ constant ou réciproque tel que $Q = (X-1)P$.

Soit $R$ un polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ ayant la propriété suivante : *Toute racine $a$ de $R$ est non nulle et $\frac{1}{a}$ est racine de $R$, de même multiplicité que $a$.*

**4.** Démontrer que le produit des racines de $R$, comptées avec leur multiplicité, ne peut prendre que les valeurs 1 ou $-1$. On pourra remarquer que l'égalité $a = \frac{1}{a}$ n'a lieu que pour $a \in \{1, -1\}$.

**5.** En déduire que $R$ est réciproque ou antiréciproque.

# Partie 2. Le cas diagonalisable

Soit A une matrice appartenant à $\mathbf{GL}_n$.

**6.** Soit $x$ un nombre réel non nul. Exprimer $\det(xI_n - A)$ en fonction de $x$, $\det A$ et $\det\left(\frac{1}{x}I_n - A^{-1}\right)$.

**7.** On suppose dans cette question que $A$ est semblable à son inverse. Préciser les valeurs que peut prendre le déterminant de $A$. En déduire que $\chi_A$ est soit réciproque, soit antiréciproque.

**8.** Soit $B \in \mathbf{M}_n$ une matrice diagonalisable. On suppose que le polynôme caractéristique de $B$ est réciproque ou antiréciproque. Démontrer que $B$ est inversible et semblable à son inverse.

**9.** Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ n'est pas semblable à son inverse bien que son polynôme caractéristique soit réciproque.
*On pourra s'intéresser aux espaces propres de $B$ et de $B^{-1}$.*

*Ainsi, hors du cas diagonalisable, le polynôme caractéristique ne suffit pas à caractériser les matrices semblables à leur inverse. La suite du problème se propose de caractériser ces matrices par une autre méthode.*

# Partie 3. Produits de matrices de symétries

On dit qu'un endomorphisme $f$ d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel $E$ est une symétrie si $f \circ f = Id_E$. On dit qu'une matrice $S \in \mathbf{M}_n$ est une matrice de symétries si $S^2 = I_n$.

**10.** Démontrer que si $S_1$ et $S_2$ sont deux matrices de symétrie, la matrice produit $A = S_1S_2$ est inversible et semblable à son inverse.

**11.** Si une matrice $A$ est un produit de deux matrices de symétries, en est-il de même de toute matrice semblable à $A$ ?

*Soient $B$ et $C$ deux matrices de $\mathbf{GL}_n$. Soit $A \in \mathbf{M}_{2n}$ la matrice définie par blocs $A = \begin{pmatrix} B & 0_n \\ 0_n & C \end{pmatrix}$.*

**12.** Soit $S_1$ la matrice par blocs $S_1 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix}$ où $P$ et $Q$ sont deux éléments de $\mathbf{GL}_n$. Déterminer les conditions reliant $B, C, P, Q$ pour que les matrices $S_1$ et $S_2 = S_1A$ soient des matrices de symétries.

**13.** En déduire que si $C$ est semblable à $B^{-1}$, alors $A$ est un produit de deux matrices de symétries.

# Partie 4. La matrice $J_n(\lambda)$

**14.** Soit $E$ un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension $n$. Soit $g$ un endomorphisme de $E$ tel que $g^n = 0$ et $g^{n-1} \neq 0$. Démontrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $g$ est la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit : $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $n_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$ et $n_{i,j} = 0$ sinon.

**15.** Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ non nul, on pose $J_n(\lambda) = \lambda I_n + N$. Démontrer que $J_n(\lambda)$ est inversible et déterminer en fonction de $N$ et de $\lambda$ la matrice $N'$ telle que $J_n(\lambda)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} I_n + N'$.

**16.** Calculer $(N')^n$ et en déduire que $J_n(\lambda)^{-1}$ est semblable à $J_n\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$.

Pour tout polynôme $P = P(X) \in \mathbf{C}_{n-1}[X]$ on pose

$$\begin{cases} s_1(P) = P(-X) \\ s_2(P) = P(1 - X) \\ g(P) = P(X + 1) - P(X) \end{cases}$$

*On définit ainsi trois endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ (il n'est pas demandé de le prouver).*

**17.** Calculer $s_1^2$, $s_2^2$ et exprimer $s_1 \circ s_2$ en fonction de $g$ et $Id_{\mathbf{C}_{n-1}[X]}$.

**18.** Soit $P$ un polynôme non constant. Exprimer le degré du polynôme $g(P)$ en fonction de $\deg(P)$.

**19.** Déduire des questions précédentes que la matrice $J_n(1)$ est un produit de deux matrices de symétries.

*On admet que l'on pourrait démontrer par le même type de raisonnement que la matrice $J_n(-1)$ est un produit de deux matrices de symétries.*

# Partie 5. Une caractérisation des matrices semblables à leur inverse

Soit $A$ une matrice de $\mathbf{GL}_n$ semblable à son inverse. On admet le résultat suivant :

*La matrice $A$ est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme*

$$A' = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

*où les $\lambda_i$ sont les valeurs propres de $A$ (pas nécessairement distinctes) et $r$ ainsi que les $n_i, 1 \leq i \leq r$, des entiers naturels non nuls. De plus, la matrice $A'$ est unique à l'ordre des blocs près.*

**20.** Démontrer que $A^{-1}$ est semblable à $\begin{pmatrix} J_{n_1}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r}\left(\frac{1}{\lambda_r}\right) \end{pmatrix}$.

**21.** En utilisant les résultats établis dans les parties précédentes, démontrer que $A$ est un produit de deux matrices de symétries. Conclure.