Fonctions continues par morceaux
formules de Taylor

1. Fonctions continues par morceaux sur un segment

Dans tout le document, I désigne un intervalle « non trivial », *i.e.* de longueur strictement positive. Par $\mathbb{K}$, on désigne le corps des réels, $\mathbb{R}$, ou celui des complexes, $\mathbb{C}$.

On commence par le cas où $I = [a, b]$ est un *segment.*

Définition 1. *Soit une fonction* $f\colon [a, b] \to \mathbb{K}$. *Soit une subdivision* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ *de* $[a, b]$. *On suppose que, pour tout* $i \in [\![0, n-1]\!]$, f *est continue sur* $]x_i, x_{i+1}[$. *Alors, l.p.s.s.e. :*

(i) La fonction f *admet une limite finie à droite en tout point* x_i *de la subdivision pour* $i \in [\![0, n-1]\!]$ *et une limite finie à gauche en tout point* x_i *de la subdivision pour* $i \in [\![1, n]\!]$.

(ii) Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, *la restriction* $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ *de* f *à l'intervalle ouvert* $]x_i, x_{i+1}[$ *admet un prolongement par continuité à l'intervalle fermé* $[x_i, x_{i+1}]$, *noté* $\tilde{f}_{(x_i,x_{i+1})}$ *(qui n'est pas forcément* $f_{|[x_i,x_{i+1}]}$*).*

S'il existe une subdivision $\mathcal{S}$ *(finie par définition) de* $[a, b]$ *telle que les propositions ci-dessus soient vérifiées, alors* f *est dite continue par morceaux sur le segment* $[a, b]$. *La subdivision* $\mathcal{S}$ *est dite* adaptée *à* f.

Propriétés et exemples — Les fonctions continues sont continues par morceaux.
— Les fonctions en escalier sont continues par morceaux.
— Les fonctions affines par morceaux sont continues par morceaux.
— Les fonctions continues par morceaux admettent une limite à droite et à gauche en tout point, mais la réciproque est fausse.

Exercice 1. Montrer la dernière propriété.

Proposition 1. *Si* f *est continue par morceaux sur* $[a, b]$, *il existe alors une* subdivision adaptée minimale $\mathcal{S}_0$ *associée à* f, *qui est constituée, outre* a *et* b, *des points de discontinuité de* f. *Autrement dit, toute subdivision* $\mathcal{S}$ *adaptée à* f *est telle que* $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$.

Exercice 2. Montrer la proposition 1.

Théorème 1. Théorème des bornes. *Si* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *est continue par morceaux, alors elle est bornée. En revanche, contrairement au cas continu, elle n'atteint pas nécessairement ses bornes.*

Exercice 3. Prouver le théorème 1 en le déduisant du cas continu.

Notation 1. Si $[a, b]$ est un intervalle non trivial, on note $\mathcal{C}^0_{p.m.}\big([a, b], \mathbb{K}\big)$ l'ensemble des fonctions définies sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et continues par morceaux sur le segment $[a, b]$.

Proposition 2. Stabilité algébrique de la continuité par morceaux.
L'ensemble $\mathcal{C}^0_{p.m.}\big([a, b], \mathbb{K}\big)$ *est un espace vectoriel stable par produit.*

Exercice 4. Montrer que $\mathcal{C}^0_{p.m.}\big([a, b], \mathbb{K}\big)$ est un espace vectoriel.

Exercice 5. *Stabilité par composition.*
Soient I et J deux segments non triviaux, $f \in \mathcal{C}^0_{\text{p.m.}}(I)$ et $g \in \mathcal{C}^0(J)$.
1. On suppose que $f(I) \subset J$. Alors, $g \circ f$ est bien définie et continue par morceaux sur I.
2. On suppose que $g(J) \subset I$. Alors, $f \circ g$ est bien définie, mais pas nécessairement continue par morceaux sur J. *Indication* : Pour le contrexemple, on pourra prendre pour f la fonction d'Heaviside $f = H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$.
3. Montrer que, dans la situation de la question 2, si l'on rajoute l'hypothèse que g est strictement monotone, alors $f \circ g$ est continue par morceaux.

Exercice 6. Montrer que, sur un segment, une fonction est continue par morceaux si, et seulement si, elle est la somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier. Pour montrer l'implication directe, on pourra commencer par le cas d'une fonction f telle que $\lim\limits_{\substack{x\to u\\ x\neq u}} f(u)$ existe pour tout u.

Exercice 7. *Théorème de Darboux*
1. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $\varphi(x) = x^2\sin(1/x)$. Vérifier que φ est prolongeable en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (toujours notée φ), mais que φ' n'est pas continue en 0.
2. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(a) < 0 < f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ telle que $f'(c) = 0$.
3. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (théorème de Darboux). Que peut-on dire de f' si f' est continue par morceaux ?

2. Intégrale

Soit $[a,b]$ un segment non trivial de $\mathbb{R}$. On suppose connue la théorie de l'intégrale des fonctions de $\mathcal{C}^0\big([a,b],\mathbb{K}\big)$. Le but de ce paragraphe est de l'étendre brièvement aux fonctions de $\mathcal{C}^0_{p.m.}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$.

Théorème et définition 1. *Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ et si $\sigma\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ est une subdivision contenant les points de discontinuité de f (donc adaptée à f), on définit*

$$\mathcal{I}(f,\mathcal{S}) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{f}_{(x_i,x_{i+1})}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors, $\mathcal{I}(f,\mathcal{S})$ ne dépend pas de $\mathcal{S}$. On peut alors poser

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{I}(f,\mathcal{S}).$$

Démonstration. Notons que, par construction et pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, la fonction $\tilde{f}_{(x_i,x_{i+1})}$ est continue sur le segment $[x_i,x_{i+1}]$ et que $\mathcal{I}(f,\mathcal{S})$ est ainsi bien définie. Soient $\mathcal{S}_0$ la subdivision adaptée minimale associée à f et $\mathcal{S}$ une subdivision adaptée à f. D'après la proposition 1, $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$. Notons $\mathcal{S}_0 = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ et $\mathcal{S} = (y_i)_{0\leqslant i\leqslant m}$. Ainsi, il existe une unique suite d'entiers strictement croissante $(p_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ telle que $x_i = y_{p_i}$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ et l'on a

$$\forall i \in [\![0,n-1]\!] \colon [x_i,x_{i+1}] \cap \mathcal{S} = \big\{y_j\ ;\ j \in [\![p_i,p_{i+1}]\!]\big\} = \mathcal{S}_i.$$

Pour $i \in [\![0,n-1]\!]$, la fonction $\tilde{f}_{(x_i,x_{i+1})}$ est continue, donc $\tilde{f}_{(y_j,y_{j+1})}$ est la restriction de $\tilde{f}_{(x_i,x_{i+1})}$ à $[y_j,y_{j+1}]$ pour tout $j \in [\![p_j,p_{j+1}-1]\!]$. On peut ainsi appliquer la relation de Chasles, qui donne

$$\mathcal{I}(f_{|[x_i x_{i+1}]},\mathcal{S}_i) = \sum_{j=p_i}^{p_{i+1}-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \tilde{f}_{(y_j,y_{j+1})}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=p_i}^{p_{i+1}-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \tilde{f}_{(x_i,x_{i+1})}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{f}_{(x_i,x_{i+1})}(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où, en sommant sur les valeurs de i,

$$\mathcal{I}(f,\mathcal{S}) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \tilde{f}_{(y_j,y_{j+1})}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{I}(f_{|[x_i x_{i+1}]},\mathcal{S}_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{f}_{(x_i,x_{i+1})}(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{I}(f,\mathcal{S}_0).$$

□

Proposition 3. *L'application $f \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ définit une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0_{p.m.}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$.*

Propriétés. — Si l'on modifie les valeurs prises par une fonction continue par morceaux en un nombre fini de points, elle reste continue par morceaux et la valeur de son intégrale est inchangée.
— Pour $f \in \mathcal{C}^0_{p.m.}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$, $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Proposition 4 (Relation de Chasles)**.** *Si $a < b < c$ sont trois réels, et si $f \in \mathcal{C}^0_{p.m.}\big([a,c],\mathbb{K}\big)$, alors $f \in \mathcal{C}^0_{p.m.}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$, $f \in \mathcal{C}^0_{p.m.}\big([b,c],\mathbb{K}\big)$ et*

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 8. Montrer les propositions 3 et 4.

Remarque 1. L'application $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ **ne** définit **pas** un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0_{p.m.}\big([a,b]\big)$ comme c'est le cas sur $\mathcal{C}^0\big([a,b]\big)$.

3. Extension de la continuité par morceaux aux intervalles quelconques.

Définition 2. *Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Une fonction $f\colon I \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux si sa restriction à tout segment inclus dans I l'est.*

Notation 2. On note $\mathcal{C}^0_{p.m.}(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux définies sur I. En cas de besoin, on peut préciser s'il s'agit des fonctions à valeurs réelles ou complexes en notant $\mathcal{C}^0_{p.m.}(I,\mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0_{p.m.}(I,\mathbb{C})$.

Propriétés. — La continuité par morceaux est stable par restriction.
— Si $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et si $A \subset \mathbb{R}$ est bornée, alors $\mathcal{D} \cap A$ est fini.
— Les propositions 2 et l'exercice 5 s'étendent immédiatement au cas d'un intervalle quelconque.

Exemples. — Toute fonction continue est continue par morceaux ;
— la fonction $x \longmapsto 1/x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, mais pas prolongeable en une fonction de $\mathcal{C}^0_{p.m.}(\mathbb{R}_+)$;
— on peut dire la même chose des fonctions $x \longmapsto \sin(1/x)$ et $x \longmapsto \operatorname{sgn}\big(\sin(1/x)\big)$ sur les mêmes intervalles ;
— toute fonction dont la restriction à tout segment est en escalier est continue par morceaux ; par exemple, $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ appartient à $\mathcal{C}^0_{p.m.}(\mathbb{R})$;

Exercice 9. Représenter graphiquement les fonctions suivantes. Lesquelles sont-elles continues par morceaux sur leur domaine de définition ?

(i) $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ pour $x \in \mathbb{R}$;
(ii) $0 \longmapsto 0$ et x^x si $x > 0$;
(iii) $0 \longmapsto 0$ et $x \longmapsto 1/x - \lfloor 1/x \rfloor$ si $x > 0$.
(iv) $x \longmapsto \varepsilon_k(x)$, k-ème chiffre du développement décimal de x sur $\mathbb{R}$

Exercice 10. Une fonction continue par morceaux sur un intervalle non borné peut-elle avoir une infinité de points de discontinuité ? Et sur un intervalle borné ?

Exercice 11. Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue par morceaux. On pose $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T \cos(n\omega t) f(t)\,\mathrm{d}t$ et $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T \sin(n\omega t) f(t)\,\mathrm{d}t$. La série de Fourier de f est, par définition,

$$S(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\big]$$

Un célèbre théorème dû à Dirichlet affirme que, sous l'hypothèse que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série $S(f)$ converge simplement (*i.e.* pour tout $t \in \mathbb{R}$) et que

$$S(f)(t) = \frac{1}{2}\left(\lim_{\substack{u \to t \\ u < t}} f(u) + \lim_{\substack{u \to t \\ u > t}} f(u)\right).$$

Proposer une définition raisonnable de « $\mathcal{C}^1$ *par morceaux* » et expliquer pourquoi l'on ne peut pas avoir en général $S(f) = f$.

4. Primitivation

Définition 3. *Si $f\colon I \to \mathbb{K}$, on appelle primitive de f une fonction $F\colon I \to \mathbb{K}$ dérivable telle que $F' = f$.*

Théorème 2. *Si f est continue par morceaux sur I et $x_0 \in I$, soit $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.*
1. *Si f est continue, alors F est la seule primitive de f s'annulant en x_0. Autrement dit, F est dérivable sur I, $F(x_0) = 0$ et, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.*
2. *Si f est seulement continue par morceaux, la fonction F est dérivable à droite en tout point $x \neq \sup(I)$ et l'on a $F'_d(x) = \lim\limits_{\substack{t\to x\\ t>x}} f(t)$; elle est dérivable à gauche en tout point $x \neq \inf(I)$ et l'on a $F'_g(x) = \lim\limits_{\substack{t\to x\\ t<x}} f(t)$. Corrélativement, F est dérivable en $x \in I$ si, et seulement si, $\lim\limits_{\substack{t\to x\\ t\neq x}} f(t)$ existe et, en ce cas, on a $F'(x) = \lim\limits_{\substack{t\to x\\ t\neq x}} f(t)$.*
3. *La fonction F est la seule fonction continue sur I, nulle en x_0, et dont la dérivée coïncide avec f en tout point où ses limites à droite et à gauche sont identiques, donc en particulier en tout point de continuité de celle-ci.*

Démonstration. Par la relation de Chasles, les propriétés de dérivabilité de F ne dépendent pas du choix de x_0. Soient $[a,b] \subset I$ un segment et $\mathcal{S} = (y_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une subdivision associée à $f_{|[a,b]}$. Pour $x \in [a,b]$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme la restriction de f au segment $[a,b]$ est bornée par le théorème des bornes (théorème 1), posons $M = \sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |f(t)| \in \mathbb{R}_+$. Alors,

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2 \colon F(x) - F(y) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \therefore \qquad |F(x) - F(y)| \leqslant M|x-y|.$$

Autrement dit, F est M-lipschitzienne, donc continue. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Pour $y_k < x < y_{k+1}$, on peut écrire

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{y_k} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{y_k}^x f(t)\,\mathrm{d}t = I_k + \int_{y_k}^x \tilde{f}_{(y_k,y_{k+1})}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, la restriction $F_{|[y_k,y_{k+1}]}$ est continue comme restriction à un sous-intervalle d'une fonction continue. De plus, comme le montre l'expression ci-dessus, la restriction $F_{|]y_k,y_{k+1}[}$ est, elle, la somme de la constante I_k et de la primitive de la fonction continue $\tilde{f}_{(y_k,y_{k+1})}$ qui s'annule en y_k, donc une fonction dérivable, avec

$$\forall x \in]y_k, y_{k+1}[\colon F'(x) = \tilde{f}'_{(y_k,y_{k+1})}(x) = f(x).$$

Par hypothèse, f admet une limite finie aux bornes de $]y_k, y_{k+1}[$. On peut alors appliquer le théorème de la limite de la dérivée, qui montre que F est dérivable à droite en y_k avec $F'_d(x_k) = \lim\limits_{\substack{x\to y_k\\ x>y_k}} f(x)$ et dérivable à gauche en y_{k+1} avec $F'_g(y_{k+1}) = \lim\limits_{\substack{x\to y_k\\ x<y_{k+1}}} f(x)$. Cela démontre les deux premiers items du théorème.

Concernant le troisième item, on vient de voir que la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,dt$ répond bien au cahier des charges. Si G vérifie les mêmes hypothèses, alors $F - G$ est continue et, pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I et toute subdivision $\mathcal{S} = (y_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ associée à $f_{|[a,b]}$, $F - G$ est dérivable sur $]y_k, y_{k+1}[$ et de dérivée nulle sur cet intervalle. Donc $F - G$ est constante sur tous ces intervalles et, comme elle est continue, constante aussi sur $[y_k, y_{k+1}]$, donc constante sur $[a,b]$ et, enfin, constante sur I. Enfin, $F(x_0) = G(x_0)$, donc $F = G$.

□

Propriétés. —Toutes les fonctions continues admettent une unique primitive à une constante additive près, données, également à une constante additive près, par une intégrale.
— Dans le cas des fonctions continues par morceaux, ces intégrales $x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^x f$ ne sont pas *stricto sensu* des primitives, mais elles sont bien dérivables et de dérivées f **aux points de continuité de** f.

5. Formules de Taylor

Théorème 3. ***1.*** Formule de Taylor-Young. *Si $f\colon I \to \mathbb{K}$ est n fois dérivable en a, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a \in I$, alors,*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathfrak{o}\big((x-a)^n\big).$$

2. Formule de Taylor avec reste intégral. *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. Inégalité de Taylor-Lagrange. *Sous les mêmes hypothèses,*

$$\left| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant (b-a)^{n+1} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{où } M_{n+1} = \sup_{a\leqslant t\leqslant b} \left| f^{(n+1)}(t) \right|.$$

Remarque 2. **1.** Les hypothèses sont faciles à retenir (pourquoi ?) L'existence d'un développement limité à l'ordre 1 en un point est équivalente à la dérivabilité de la fonction en ce point. À un ordre supérieur, ce n'est plus vrai.
2. Par le changement de variable $x = a + h$, on obtient la forme suivante usuelle du développement limité :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \mathfrak{o}\big(h^n\big).$$

En posant $b = a + h$, puis $t = a + uh$ dans l'intégrale, la formule de Taylor avec reste intégrale devient

$$f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k = h^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+uh)\,\mathrm{d}u.$$

Il n'est pas indispensable de retenir cette dernière forme par cœur.

Exercice 12. Pour $x > 0$, on pose $f_{\alpha,\beta}(x) = x^\alpha \sin(x^{-\beta})$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$.
1. Pour quelles valeurs du couple (α, β) la fonction $f_{\alpha,\beta}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ? On suppose dans la suite que cette condition est vérifiée et que $f_{\alpha,\beta}$, dûment prolongée, est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Pour quelles valeurs du couple (α, β) la fonction $f_{\alpha,\beta}$ est-elle dérivable en 0 ? Que vaut alors $f'_{\alpha,\beta}(0)$? La fonction $f_{\alpha,\beta}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
3. Pour quelles valeurs du couple (α, β) la fonction $f_{\alpha,\beta}$ est-elle deux fois dérivable en 0 ? Pour $n \geqslant 2$, donner une valeur de (α, β) telle que $f_{\alpha,\beta}$ admette un développement limité à l'ordre n en 0 sans y être deux fois dérivable.

Exercice 13. **1.** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux (resp. trois) fois dérivable en 0. Calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2h) - 2f(h) + f(0)}{h^2} \text{ resp. } \lim_{h\to 0} \frac{f(3h) - 3f(2h) + 3f(h) - f(0)}{h^3}.$$

2. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^r = \begin{cases} (-1)^n n\,! & \text{si } r = n \\ 0 & \text{si } 0 \leqslant r < n. \end{cases}$$

Indication : on pourra s'intéresser au comportement en 0 de la fonction $T(x) = (1 - \mathrm{e}^x)^n$.
3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable en 0. Monter que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(kh) = f^{(n)}(0).$$